







LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE;

Par P. TEDENAT,

Associé de l'Institut national de France, Professeur de Mathématiques à l'École centrale du Département de l'Aveyron.

A RODEZ, CHEZ L'AUTEUR;

Et à PARIS,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN SEPTIÈME.

AVERTISSEMENT.

Ces Elémens de Géométrie font suite aux Leçons Elémentaires d'Arithmétique et d'Algèbre qui ont déjà paru : je me suis attaché à y donner aux principes des anciens Géomètres toute la rigueur dont il sont susceptibles, et à les démontrer avec toute la clarté et la précision qu'on trouve dans les ouvrages des modernes. J'ai pris, en un mot, Euclide et Legendre pour modèles. J'y ai fait un fréquent usage de la méthode des limites que ce dernier Géomètre n'a pas employée, mais qu'il regarde néanmoins comme une bonne préparation au Calcul différentiel. On ne la trouve pas d'ailleurs dans la plupart des Livres élémentaires. C'est pour donner à cette méthode tous les développemens convenables, que je considère les perpendiculaires comme la limite des obliques; l'angle droit, comme la limite des angles aigus et obtus; les tangentes, comme les limites des sécantes; le cercle, le cylindre, le cône, la sphère..... comme limites respectives

des polygones, des prismes, des pyramides, des sphéroïdes et des polyèdres qu'on peut leur inscrire et circonscrire. Leurs surfaces et leurs solides ont été évalués d'après ces considérations : celles des prismes polygonaux, droits ou obliques, des pyramides, et un grand nombre d'autres propositions sur les lignes proportionnelles, sur la mesure des angles, sur les incommensurables.... &c. en ont été déduites.

On trouvera dans ces Elémens, l'application du Calcul décimal au Toisé des surfaces et des solides ; le rapport des nouvelles Mesures aux anciennes ; leur nomenclature ; plusieurs propositions sur les polygones sphériques : enfin, les principes de la Trigonométrie rectiligne et sphérique. Toutes ces propositions ont été démontrées par la synthèse, c'est-à-dire, avec la rigueur qui caractérise la méthode des anciens. C'est pour cette raison que j'ai banni du texte toute expression algébrique ; mais j'ai eu soin de les rétablir dans les notes qui se trouvent à la fin de l'ouvrage. J'y ai donné les principes des constructions algébriques, et la solution de

quelques problêmes intéressans tirés de l'Arithmétique universelle de Newton. Plusieurs propositions déjà démontrées par la synthèse sont traitées de nouveau par la méthode analytique, pour accoutumer les commençans à la comparaison des rapports exprimés en lignes et en caractères algébriques, et les mettre en état de juger de la rapidité, et de l'élégance des démonstrations analytiques.

TABLE.

LIVRE PREMIER.

Des Lignes.

LIVRE II.

Des Surfaces.

LIVRE III.

Des Solides.

TRIGONOMÉTRIE.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

FIN DE LA TABLE.

LEÇONS

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE.

1. L'ARITHMÉTIQUE et l'algèbre n'envisagent dans la grandeur que la seule propriété d'être susceptible d'accroissement et de diminution. C'est le point de vue le plus général et le plus abstrait sous lequel on puisse la considérer : ainsi l'objet de ces deux sciences est purement intellectuel, et n'existe que dans notre entendement. Les deux seules grandeurs réelles que nous connoissons sont l'étendue et la durée : les propriétés de l'étendue, considérée simplement comme mesurable, sont l'objet de la géométrie.

2. La première idée que nous nous formons de l'étendue, considérée d'une manière abstraite ou d'une manière concrète, comporte nécessairement celle des trois dimensions, longueur, largeur et profondeur. On peut cependant concevoir l'étendue dépouillée successivement d'une ou de deux dimensions, et même de toutes les trois, pour nous former l'idée de ce que dans la géométrie on nomme *surface, ligne, point*.

3. Supposez donc une étendue en longueur, largeur et profondeur, vous aurez l'idée du solide.

Si, dans l'idée du solide, vous faites abstraction de la profondeur, vous aurez l'idée d'une surface.

Prenez cette surface et pensez à sa longueur sans songer à sa largeur, vous aurez l'idée de la ligne.

Enfin, réfléchissez sur l'extrémité de la ligne sans songer à sa longueur, vous aurez l'idée du point.

4. Ainsi le solide est ce qui réunit les trois dimensions de l'étendue; la surface est ce qui ne réunit que deux dimensions; la ligne est ce qui n'a qu'une dimension, et le point est ce qui n'a ni longueur, ni largeur, ni profondeur. C'est ainsi que, par des abstractions successives, on passe de la notion du solide à celle du point.

5. On peut aussi remonter de l'idée du point à celle du solide de la manière suivante.

Fig. 1. Si l'on conçoit qu'un point change continuellement de place, et que dans son mouvement il laisse par-tout des traces, l'espace parcouru sera une ligne.

Si le point, dans son mouvement, va de *A* en *B*, par le chemin le plus court, la ligne décrite sera droite.

Si cette ligne se meut dans le sens de la seconde dimension, en laissant pareillement des traces, elle engendrera une surface.

Si la surface est telle que la ligne droite puisse s'y appliquer dans tous les sens, on la nomme un plan.

Enfin, si la surface se meut dans le sens de la troisième dimension, et qu'elle laisse des traces de son passage, elle produira un solide (1).

---

(1) La considération du mouvement (objet de la mécanique), entre quelquefois dans les recherches de géométrie pure; c'est ainsi que Newton considère la ligne comme engendrée par le mouvement d'un point. *Linea est fluxus puncti......* Il y a cependant cette différence entre la mécanique et la géométrie, que non-seulement dans celle-ci la génération des lignes, des surfaces, des solides, etc. par le

6. L'étendue des solides est la seule que la nature nous présente, et ce n'est que par des abstractions successives que l'on descend graduellement jusqu'au point. L'ordre naturel dans la vraie génération des idées demanderoit donc qu'on s'occupât d'abord de la géométrie des solides, ensuite de celle des surfaces, enfin de celle des lignes. Si l'on intervertit cet ordre dans les livres élémentaires, c'est pour suivre la méthode analytique qui va du plus simple au plus composé, en considérant d'abord l'étendue limitée par une seule dimension, ensuite par deux, et enfin sous les trois dimensions qui constituent l'essence du solide intelligible, c'est-à-dire d'une portion de l'espace terminé en tous sens par des bornes intellectuelles.

Nous diviserons donc les élémens de géométrie en trois livres; le premier traitera des lignes, le second des surfaces, et le troisième des solides.

Explication des termes dont on fait usage en géométrie.

7. *Axiome*, est une proposition évidente par elle-même, et dont l'énoncé suffit pour en appercevoir la vérité.

Théorême, est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé démonstration.

---

mouvement, est pour ainsi dire arbitraire et de pure élégance; mais encore que la géométrie ne considère dans le mouvement que l'espace parcouru, au lieu que dans la mécanique, on a égard de plus au temps employé par le mobile à parcourir l'espace. Nous avouerons cependant qu'introduire le mouvement dans la géométrie, c'est y introduire une idée étrangère, et qui n'est pas assez simple.

Lemme, est une proposition préliminaire, qu'on démontre pour préparer à la démonstration d'un théorême.

Corollaire, est une conséquence qui découle d'une ou de plusieurs propositions démontrées.

Scholie, est une remarque sur les propositions déjà démontrées, pour en faire connoître leur liaison, leur utilité ou leur généralité.

Principes sur lesquels sont appuyées les démonstrations des théorêmes (a)

8. I. Deux grandeurs ou deux figures sont égales, lorsqu'en les appliquant l'une sur l'autre, elles coïncident dans tous leurs points.

II. Deux grandeurs sont égales, si de leur inégalité supposée d'après les conditions données, il s'ensuit une absurdité.

III. Deux grandeurs sont égales, lorsqu'on peut supposer leur différence plus petite que toute quantité assignable.

IV. Quelque grande que soit une quantité, on peut en concevoir une autre qui la surpasse d'une quantité donnée.

V. Quelque petite que soit une quantité, on peut en concevoir une autre qui soit encore plus petite qu'elle.

VI. Une grandeur a pour limite une autre grandeur, quand on conçoit qu'elle peut approcher de celle-ci, jusqu'à n'en différer que d'une quantité aussi petite qu'on voudra, sans pouvoir jamais coïncider avec elle.

VII. Deux grandeurs qui sont la limite d'une même quantité, sont nécessairement égales entre elles; car s'il y avoit entr'elles quelque différence,

la première ne pourroit approcher de l'une des deux, de plus près que de cette différence, ce qui est contre la supposition.

VIII. Si deux grandeurs qui, croissent ou décroissent continuellement, conservent entr'elles le même rapport invariable, cette raison ou ce rapport sera celui des limites des deux grandeurs; car si cela n'étoit pas, il faudroit que le rapport eût changé quelque part, dans les accroissemens ou décroissemens correspondans des deux grandeurs, ce qui est contre la supposition.

IX. La limite de l'expression d'une suite de grandeurs est l'expression de la limite de ces grandeurs.

LIVRE PREMIER.

DES LIGNES.

9. Toute la géométrie des lignes se réduit à examiner, 1°. leur nature; 2°. les propriétés qui naissent de leurs positions respectives; 3°. les rapports qu'elles peuvent avoir entr'elles.

SECTION PREMIÈRE.

De la nature des lignes.

10. La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

11. La ligne qui n'étant pas droite est composée de lignes droites, est une ligne brisée.

12. Toute ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites, est une ligne courbe.

Fig. 1. Ainsi AB est une ligne droite, $ACDB$ est une ligne brisée, et AEB est une ligne courbe.

13. Toute ligne droite qui ira du point A au point B, se confondra nécessairement avec AB: ainsi, d'un point à un autre, on ne peut mener qu'une seule ligne droite.

14. Donc deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite, et par conséquent deux li-

gnes droites ne peuvent se couper qu'en un point (1).

15. La ligne droite est unique dans son espèce; elle ne peut pas être plus ou moins droite. Les lignes courbes, au contraire, sont diversifiées à l'infini; elles peuvent être plus ou moins courbes.

16. De toutes les lignes courbes, la plus simple dans sa nature, la plus facile dans sa description, la seule dont on fait usage dans les élémens de géométrie, est la ligne circulaire, qu'on peut concevoir décrite de la manière suivante. Fig. 2.

17. Si une droite *CD*, immobile au point *C* et mobile à l'extrémité *D*, est supposée faire une révolution autour du point *C*, il est visible que le point *D* décrira une courbe, dont tous les points seront également distans du point *C*. Cette courbe s'appelle ligne circulaire; le point *C* en est le centre.

Le cercle est l'espace terminé par la ligne circulaire. Quelquefois, dans le discours, on confond le cercle avec la circonférence; mais il est toujours facile de rétablir l'exactitude des expressions, en se ressouvenant que le cercle est une surface, tandis que la circonférence n'est qu'une ligne.

18. Toute ligne droite comme *CA*, *CF*, menée du centre à la circonférence, s'appelle *rayon*.

19. Toute ligne droite, comme *DB*, menée d'un point de la circonférence au point opposé, en passant par le centre, s'appelle *diamètre*.

En vertu de la définition du cercle, tous les rayons sont égaux; tous les diamètres le sont donc aussi.

(1) On sera assuré qu'une ligne est droite, lorsque tous les points, pris trois à trois, seront dans une même direction; d'où on peut déduire une manière bien simple de tracer une ligne droite sur le terrein, par le moyen de piquets ou jallons.

20. Les portions de la circonférence telles que *BF*, *FA*, *AD*, comprises entre deux rayons, sont arcs de cercle.

Fig. 5. 21. La ligne droite *AB*, qui joint les extrémités de l'arc, est nommée la corde ou la soutendante de l'arc.

22. Le segment est la surface ou portion de cercle comprise entre l'arc et la corde, telle que *ADB*.

Fig. 2. 23. Le secteur est une partie du cercle comprise entre un arc et deux rayons; tel est l'espace *BCF*.

24. On appelle sécante une ligne droite qui rencontre la circonférence en deux points, ou qui prolongée, la rencontreroit en deux points, telle que
Fig. 5. *MN*.

25. La tangente est une ligne qui n'a qu'un point de commun avec la circonférence du cercle, telle que *RS*.

26. On peut aussi considérer la tangente comme une sécante dont les deux points d'intersection sont réunis; ou comme le prolongement des côtés infiniment petits, dont on peut supposer que le cercle est composé.

27. Deux circonférences de cercle se touchent lorsqu'elles n'ont qu'un point de commun; si elles ont deux points de commun, elles se coupent nécessairement.

SECTION II.

Des propriétés des lignes qui naissent de leurs positions respectives.

28. Lorsque deux lignes droites se rencontrent, l'ouverture ou inclinaison plus ou moins grande formée par ces deux lignes, se nomme *angle*; tel est l'angle BAC, formé par les deux lignes BA, CA, qui se rencontrent au point A. Fig. 4.

29. On désigne ordinairement un angle par la seule lettre placée à son sommet A, ou par trois lettres, et alors celle du milieu répond à son sommet.

30. La grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés, ni de l'espace compris entre ses côtés, mais uniquement de l'inclinaison que ses côtés ont l'un par rapport à l'autre; en sorte que si on prolonge les côtés AB, AC, de l'angle BAC, vers M et N, ces côtés, quoique devenus plus longs, conserveront toujours l'un à l'égard de l'autre la même inclinaison, et formeront par conséquent le même angle.

31. Lorsqu'une droite DE tombe sur une autre AB, sans pencher d'aucun côté, les angles adjacents DEB, DEA sont égaux. Chacun de ces angles se nomme un angle droit; et la ligne DE est dite perpendiculaire sur AB. Fig. 5.

32. Si la ligne dE, en tombant sur AB, est plus inclinée d'un côté que de l'autre, elle formera deux angles, l'un *aigu* $dEB <$ que l'angle droit, et l'autre *obtus* $dEA >$ que l'angle droit, et la

ligne dE est dite oblique sur AB : l'angle aigu sera d'autant plus petit, que la ligne dE sera plus oblique par rapport à AB.

33. Enfin, si la position de la ligne DE, par rapport à AB, est telle que l'angle aigu s'évanouisse, c'est-à-dire si la position respective des deux lignes est telle qu'étant situées dans le même plan, elles soient à égales distances dans tous leurs points correspondans, les deux lignes sont dites parallèles.

34. La ligne perpendiculaire et la parallèle sont les deux limites d'inclinaison d'une ligne par rapport à l'autre : le degré d'inclinaison de la première est zéro, et celui de la seconde est infini.

L'angle droit est donc aussi la limite des angles aigus et obtus.

35. *Théorème.* Tous les angles droits sont égaux entr'eux.

Fig. 6. Soit CE perpendiculaire sur AB, et GF perpendiculaire sur MN, soit pris sur AE la partie $RE=MF$ et $ES=FN$: on pourra supposer que la ligne MN est placée sur AB, de manière que le point M soit sur R, et le point N sur le point S, le point F tombera nécessairement sur le point E, à cause de $RE=MF$. Or je dis que le point G tombera sur la ligne CE; car supposons pour un moment qu'il tombe hors de la ligne EC, en D, par exemple, on aura $AEC=CEB$ par la construction, et $RED=DES$, par la supposition, ou $REC+CED=CES-CED$, et $REC+2CED=CES$, ce qui est *absurde*, à moins que CED ne soit zéro. Donc la ligne FG se confond avec EC; donc l'angle $MFG=AEC$, et $NFG=CEB$.

Fig. 7. 36. *Théorème.* Toute ligne droite CB qui en

rencontre une autre AD, fait avec celle-ci deux angles adjacents, dont la somme est égale à deux angles droits.

Au point C élevez la perpendiculaire CM sur AD, l'angle $ACB = ACM + MCB$; l'angle $BCD = DCM - MCB$: donc ajoutant les deux équations, on aura $ACB + BCD = ACM + DCM$, ce qu'il falloit démontrer.

37. *Corollaire premier.* Si l'un des angles est droit, son adjacent le sera pareillement.

38. *Corollaire second.* Si la ligne DC est perpendiculaire sur AB, réciproquement AB est perpendiculaire sur DC.

Car de ce que DC est perpendiculaire sur AB, Fig. 5.
il s'ensuit que l'angle AED = son adjacent — BED, et qu'ils sont tous les deux droits; mais AEC est aussi adjacent à AED, donc il est droit comme lui; donc AB est perpendiculaire sur DC.

39. *Théorême.* Si deux angles adjacens valent deux angles droits, les deux côtés AC, CB seront en lignes droites.

Car si CB n'est pas le prolongement de AC, Fig. 8.
soit CF, ce prolongement; en menant la ligne CD, on aura, par la supposition $ACD + DCB$ = deux angles droits, et par le (36) $ACD + DCF$ = deux droits, d'où l'on concluroit $DCB = DCF$; c'est-à-dire la partie égale le tout, ce qui est absurde. Donc CF doit se confondre avec CB; donc CB est le prolongement de AC.

40. *Théorême.* Toutes les fois que deux lignes droites AB, DE se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux.

Car puisque les deux lignes AB, DE sont Fig. 9.
droites, les angles $AMD + DMB$ = deux angles

droits; par la même raison $AMD+AME=$deux angles droits, donc $DMB=AME$.

41. *Corollaire premier.* Si la ligne DE est inclinée sur AB, AB sera inclinée de la même quantité sur DE; car l'inclinaison de DE sur AB est mesurée par l'angle DMB, et celle de AB sur DE est mesurée par l'angle AME.

42. *Corollaire deuxième.* Les quatre angles formés autour d'un point, par deux droites qui se coupent, valent ensemble quatre angles droits; car les deux angles $AMD+DMB=$ deux angles droits : les deux angles $AME+BME=$ deux angles droits; donc les quatre réunis font ensemble quatre angles droits.

Fig. 10. En général, si tant de lignes qu'on voudra se réunissent autour d'un point, la somme de tous les angles qu'elles formeront autour de ce point égalera quatre angles droits.

Car si, par le même point, nous menons deux lignes AD, BC perpendiculaires entr'elles, elles formeront autour du point quatre angles droits; or la somme de tous les angles formés par les autres lignes est la même que celle des angles formés par les perpendiculaires : donc, etc.

Fig. 11. 43. *Théoréme.* Si l'on conçoit que la ligne CD, immobile d'abord au point C, décrive par son extrémité D une circonférence de cercle, et qu'ensuite immobile au point D elle décrive, par son extrémité C, une seconde circonférence de cercle; qu'enfin, par les points d'intersection A, B on mène la ligne droite AB, cette droite sera perpendiculaire sur CD.

Car les lignes AC, AD sont égales, puisqu'elles sont rayons de cercles égaux; donc elles mesurent des distances égales : par la même raison $CB=DB$;

donc le point B est également éloigné de C et de D. La ligne AB a donc deux de ses points également éloignés de C et de D : mais deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite; donc AB passe toujours par des points également éloignés de C et de D; donc elle ne penche d'aucun côté, donc elle est perpendiculaire.

44. *Corollaire premier.* La perpendiculaire AB partage en deux parties égales la ligne CD, c'est-à-dire que l'on a $CI = ID$.

45. *Corollaire deuxième.* Les angles AIC, AID, CIB, DIB sont droits et égaux entr'eux.

46. *Théorême.* D'un point donné A hors d'une ligne droite BC, on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur cette droite.

Car supposons qu'on puisse en mener deux AI, AL; soit prolongée AI jusqu'en D, de manière que $AI = ID$, joignons LD, et plions par la pensée la figure sur BC, de manière que le point D tombe sur A, la droite LD aura ses deux extrémités confondues avec celles de AL; donc LD aura la même direction que AL; donc l'angle $ILD = ILA$. Or celui-ci est droit par la supposition; donc ILD l'est aussi : mais si les angles adjacens valent deux angles droits, il faut que la ligne ALD soit droite (39); d'où il résulte que du point A au point D, on pourroit mener deux lignes droites AID, ALD, ce qui est impossible; donc il est pareillement impossible que du point A on abaisse deux perpendiculaires sur la même ligne BC. Fig. 12.

46 *bis.* *Théorême.* D'un point E, pris sur la ligne AB, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire EC.

Car si on pouvoit en élever deux, soit ED la seconde, on auroit l'angle AEC droit, par la Fig. 15.

propriété de la première perpendiculaire, et l'angle AED, droit par la propriété de la seconde perpendiculaire; donc $AEC + CED = AEC$ (35), ce qui est absurde.

47. *Corollaire.* Un seul point suffit pour déterminer la position d'une perpendiculaire sur une ligne donnée de position.

Fig. 12. 48. *Théorème.* Si du point A situé hors d'une droite BC on mène la perpendiculaire AI, et différentes obliques, AN, AL, AP, à différens points de cette droite, les deux obliques AN, AL, menées de part et d'autre de la perpendiculaire à distances égales LI, NI de la perpendiculaire seront égales.

Supposez que la figure soit pliée sur la ligne AI, de manière que le point N tombe sur le point L, à cause de $IN = IL$; l'oblique AN aura ses deux extrémités confondues avec celles de AL; donc tous les autres points coincideront avec ceux de la seconde (13); donc les deux lignes seront égales.

Fig. 14. 49. *Lemme.* Si du point C, pris hors d'une ligne AB, on mène les obliques CA, CB, et que, par un autre point D, pris entre les premières lignes, on mène aux mêmes extrémités AB, deux autres obliques AD, DB, la somme des deux premières sera plus grande que la somme des deux autres.

Soit prolongé AD jusqu'en M, on aura $AD + DM < CM + CA$ (10), ou $AD < CM + CA - DM$. Par la même raison on a $BD < BM + DM$; donc, en ajoutant les deux membres $AD + BD < BC + CA$.

50. *Théorème.* De deux obliques AN, AP, menées comme on voudra, d'un même point sur

une même ligne, la plus longue est celle qui s'éloigne le plus de la perpendiculaire.

Prolongez AI jusqu'en D, de manière que vous ayez $ID = AI$; menez les obliques DN, DP. Fig. 12.
Si on suppose la figure pliée sur BC, de manière que le point D tombe sur le point A, on aura $DN = AN$, et $DP = AP$; cela posé on a $APD >$ que AND (lemme) : donc la moitié de APD, ou $AP >$ que la moitié de AND, ou AN.

51. *Corollaire.* D'un même point on ne peut mener sur une même ligne trois droites égales; car si cela étoit, il y auroit d'un même côté de la perpendiculaire deux obliques égales, ce qui est impossible (50).

52. *Théorême.* La perpendiculaire menée d'un point sur une ligne est plus courte que toutes les obliques menées du même point sur la même ligne; car on a $AD < AND$. Donc la moitié de AD, ou $AI <$ la moitié de AND, ou AN. Fig. 12.

53. *Scholie.* La perpendiculaire est la mesure naturelle des distances, des hauteurs, des profondeurs, etc., parce qu'elle est la ligne la plus courte qu'on puisse mener d'un point sur une ligne, et qu'on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire, d'un point donné sur une ligne. Ces deux propriétés donnent à la perpendiculaire les deux caractères propres à la mesure; savoir, la simplicité et l'invariabilité. Fig. 12.

54. *Théorême.* Si par le point I, milieu de LN, on élève la perpendiculaire IA sur LN, prolongée si l'on veut de part et d'autre de LN; 1°. tous les points de cette perpendiculaire seront également distans des deux extrémités de la ligne LN; 2°. tout point hors de la perpendiculaire sera inégalement distant des mêmes extrémités. Fig. 12.

Car 1°. l'on a $NI=IL$, par la supposition, donc les deux obliques AN, AL, partant du même point A, sont égales (48), il en est de même des deux obliques DL, DN... ML, MN... etc.

Donc, 1°. tout point de la perpendiculaire AID est également éloigné des deux extrémités LN.

2°. Soit O, un point hors la perpendiculaire, en prolongeant LM jusqu'en O, on a $MO+MN>NO$; mais $MO+MN=LO$: donc on a $LO>NO$; donc 2°. tout point hors de la perpendiculaire sera inégalement distant des extrémités LN.

Fig. 15. 55. *Théorême.* Si deux droites BT, AP sont perpendiculaires sur une troisième ligne AB, les deux lignes ne pourront jamais se rencontrer à quelque distance qu'on les suppose prolongées.

Car si elles pouvoient se rencontrer en un point, d'un côté ou d'autre de la ligne AB, il existeroit deux perpendiculaires menées d'un même point sur une même ligne, ce qui est impossible (46).

Fig. 50. Planc. 3. 56. *Théorême.* Si une ligne CE est perpendiculaire sur PQ, et oblique sur MN, toute autre ligne BF, ou bf, perpendiculaire sur PQ, sera nécessairement oblique sur MN; elle sera $> CE$, si elle est tirée du côté où les deux lignes PQ,MN divergent, et $< CE$, si elle est tirée du côté où elles convergent.

Car, la ligne CE étant oblique sur MN, on pourra élever par le point E une perpendiculaire EK, qui sera nécessairement oblique sur PQ (46); élevons pareillement KD perpendiculaire sur PQ, elle sera nécessairement oblique sur MN : en continuant ainsi d'élever par les points D, H, G... les lignes DH, GH......, alternativement perpendiculaires sur une des lignes PQ, MN, et obliques sur l'autre, on parviendra à la perpendiculaire GB qui rencontrera la ligne PQ, précisément au point

point B, comme dans la figure (b), ou au-delà du point B, en L, par exemple, comme dans la figure (a).

Premier cas. BG étant perpendiculaire sur MN par la construction, BF, sera nécessairement oblique; donc, etc.

Deuxième cas. Si la perpendiculaire GL rencontre la ligne BQ au-delà du point B, les deux lignes BF, LG se couperont au point O. Or, si OF étoit perpendiculaire sur MN, on auroit deux perpendiculaires OF, OG abaissées d'un même point sur une même ligne, ce qui est impossible; donc, la ligne BF, perpendiculaire sur PQ, est oblique sur MN.

Le même raisonnement et la même construction auroient également lieu pour la ligne bf, donc

1°. Si la ligne CE est perpendiculaire sur PQ et oblique sur MN, toute autre ligne perpendiculaire sur PQ sera oblique sur MN.

2°. On aura $BF > CE$ et $bf < CE$; car on a, par la propriété des perpendiculaires et des obliques, $BF > BG$, $BG > GH$, $GH > DH$, $DH > DK$, $DK > KE$, $KE > EC$, donc $BF > CE$.

Dans la figure (a) on a aussi $BF > CE$. Du point B, abaissons la perpendiculaire BT et l'oblique BG; cette perpendiculaire tombera à droite de BG; car si elle tomboit à gauche, en S, par exemple, on auroit deux perpendiculaires KS, KG, abaissées du même point sur la même ligne : cela posé, l'oblique $BF > BG$ (50), mais $BG > GH$ et $GH > CE$; donc $BF > CE$.

57. *Scholie.* Les lignes CE, BF, en tombant sur MN font deux angles, l'un aigu BFN, et l'autre obtus BFM; l'angle aigu est du côté où les lignes GH, DK, vont en diminuant, l'angle obtus est du côté où elles vont en augmentant. Fig. 50.

58. *Théorème.* Réciproquement, si les deux lignes DP, CE, perpendiculaires sur PQ sont inégales, elles seront obliques sur MN; car si
Fig. 16. l'angle PDE étoit droit, CEN le seroit aussi par la première partie du théorême précédent.

Soit pris sur PD la partie $PA = CE$; par le milieu de PC, élevons la perpendiculaire BF; plions, par la pensée, $PCED$ sur la ligne BF, de manière que le point B restant à la même place, le point C tombe sur le point P, la ligne CE prendra la direction PD, à cause de l'angle C = l'angle P; mais, par la construction, $PA = CE$, donc le point E tombera sur A, et la ligne FE aura la position FA : or, par l'hypothèse, l'angle CEN, ainsi que son adjacent CEF, sont droits, donc FAP le sera aussi; il y aura donc deux perpendiculaires FA, FD, abaissées d'un même point sur une même ligne, ce qui est impossible. Donc l'angle PDF n'est pas droit, et par conséquent les deux lignes inégales PD, CE, perpendiculaires sur PQ, sont obliques sur MN.

59. *Théorême.* Si les deux lignes CE, PA, perpendiculaires sur PQ, sont égales, les deux angles PAE, CEA, sont droits.

Fig. 16. Car si l'angle PAE n'étoit pas droit, PA seroit oblique sur AE, donc CE le seroit aussi (56); on auroit donc $PA >$ ou $< CE$, suivant que l'angle CEA seroit obtus ou aigu, ce qui est contre la supposition. Donc, si les deux lignes CE, PA, perpendiculaires sur PQ, sont égales, les deux angles AEC, PAE sont droits.

60. *Scholie.* Tant que la ligne PD est $> CE$, c'est-à-dire, tant que la différence AD entre les deux lignes est positive, l'angle CED est obtus; lorsqu'on a $PD' < CE$, c'est-à-dire, lorsque la différence AD' est négative, l'angle CED' est aigu.

A mesure que la différence entre les deux lignes diminue, l'angle *CED* diminue aussi : cette différence ne peut pas de positive devenir négative, sans passer par zéro ; de même l'angle obtus, diminuant continuellement, ne peut pas devenir aigu sans passer par l'angle droit, donc le passage doit avoir lieu lorsque les deux lignes *CE*, *PD* sont égales : et en effet, s'il avoit lieu avant ou après, il seroit vrai de dire que lorsque les deux lignes *CE*, *PD* sont inégales, les angles *CED*, *PDE* sont droits : ce qui est contre le n°. (58).

61. *Corollaire.* Si d'un autre point quelconque *B* de la ligne *PQ*, on élève une perpendiculaire *BS*, l'angle *BSA* sera droit : car si *BS* perpendiculaire sur *PQ* étoit oblique sur *EA*, toutes les autres lignes perpendiculaires sur *PQ* seroient pareillement obliques sur *EA* (56), donc, les deux lignes égales, *CE*, *PA*, perpendiculaires sur *PQ*, ne le seroient pas sur *EA*, ce qui est contre la démonstration précédente. Fig. 16.

62. *Théorême.* Si par les extrémités de deux lignes égales *AB*, *mn* perpendiculaires sur *AP*, on mène une ligne droite indéfinie *BT*, tous les points de cette droite seront à égale distance du point correspondant sur la ligne *AP*. Fig. 15.

Soit pris sur *PT*, un point quelconque *R*; abaissez la perpendiculaire *RP*, elle mesurera les distances du point *R* à la ligne *AP* : or je dis que l'on aura $PR = mn = AB$;

Car 1°. les angles *ABD*, *mnR*, étant droits ; l'angle *PRT*, ou son adjacent, le sera nécessairement.

2°. Si par le milieu de *AP*, on élève *CD* perpendiculaire à *AP*, *CD* sera perpendiculaire à *BR*, de sorte que tous les angles *B*, *D*, *R*, *P*, *C*, *A*, seront droits.

Cela posé, je dis que le quadrilatère $BDCA$ peut être placé exactement sur le quadrilatère $DRPC$: car le côté $AC=CP$, par la supposition, l'angle $BAC=CPR$, le côté CD est commun, donc, en supposant la figure pliée sur CD, de manière que le point A tombe en P, la ligne BA prendra la direction PR; or je dis que le point B tombera nécessairement sur le point R, car s'il tomboit en O ou en I, on auroit deux perpendiculaires DR, DO, ou DI, abaissées d'un même point sur une même ligne, donc $PR=AB$, et par conséquent les points R, m, B sont à égale distance de leurs points correspondans pris sur la ligne AP.

63. *Corollaire premier.* Une ligne qui a deux points également éloignés des points correspondans pris sur une autre ligne, a tous ses points à la même distance de la seconde ligne, et, par conséquent, lui est parallèle (33).

Nota. On suppose dans tout ce qui précède que les deux lignes sont dans le même plan, et que les distances des deux points sont prises du même côté, c'est-à-dire, toutes deux à droite, ou toutes deux à gauche, par rapport à une des deux lignes.

Pour exprimer que dans deux lignes parallèles, les points correspondans, c'est-à-dire, les points situés aux deux extrémités des mêmes perpendiculaires comprises entre deux parallèles sont à la même distance, on dit qu'ils sont équidistans.

64. *Corollaire deuxième.* Les lignes AB, PR, étant perpendiculaires sur AP, BR, il s'ensuit que BR, AP, sont aussi perpendiculaires sur AB, PR: on peut donc dire de AB, PR, par rapport à BR, AP, ce que nous avons dit de ces dernières lignes par rapport aux premières; donc, puisqu'on a $AB=PR$, on a aussi $BR=AP$,

et puisque BR, AP, perpendiculaires sur AB, sont parallèles, AB, PR, perpendiculaires sur AP seront parallèles entr'elles; donc deux perpendiculaires sur une même ligne, sont parallèles entr'elles.

65. *Théorême.* Si deux points quelconques F, G de la ligne MN, ne sont pas à égale distance de leurs points correspondans pris sur la ligne PQ, les deux lignes PQ, MN, se rencontreront, et par conséquent ne seront pas parallèles. Fig. 50.

Car ayant abaissé des points F, G, les perpendiculaires FB, GH, on a $FB > GH$ par la supposition, donc, les deux lignes ne sont pas perpendiculaires sur MN (58). Planc. 3.

Soit menée du point H la perpendiculaire HD; du point D la perpendiculaire DK; du point K la perpendiculaire KE... &c. on aura GH oblique sur MN, $> HD$ perpendiculaire sur MN; par une raison semblable, $HD > DK$, $DK > KE$, $KE > EC$... d'où il suit qu'en prenant sur la ligne MN des points de plus en plus éloignés de F, les perpendiculaires menées de ces points sur PQ deviendront de plus en plus courtes; et comme la ligne MN est indéfinie, rien ne limite le nombre de ces perpendiculaires qui vont toujours en diminuant. Car supposez, par exemple, que bf est la dernière perpendiculaire qu'on puisse abaisser de la ligne MN, sur la ligne PQ, ce seroit supposer que la ligne MN ne peut pas se prolonger au-delà du point f, ce qui est contre la définition et la nature de la ligne droite, il s'en trouvera donc une qui sera moindre que toute quantité assignable, ou zéro, et par conséquent les deux lignes PQ, MN, se rencontreront.

66. *Théorême.* Deux lignes BC, DM, parallèles à une troisième AN, sont parallèles entr'elles.

Des deux points quelconques A, N de la ligne Fig. 14.

AN, abaissez sur BC les deux perpendiculaires AB, NC, qui rencontreront DM en D et M, les quatre angles A, B, C, N, seront droits, et les perpendiculaires AB, NC égales par la nature des parallèles; par la même raison les quatre angles A, D, M, N seront droits, et les perpendiculaires AD, NM égales.

Donc, 1°. les deux lignes AB, NC sont aussi perpendiculaires sur DM. 2°. Si de $AB = NC$, on retranche $AD = NM$, on aura $DB = MC$; donc les deux points D, M sont équidistans avec leurs correspondans, donc les deux lignes sont parallèles.

67. *Scholie.* La théorie des parallèles, dit d'Alembert, est peut-être ce qu'il y a de plus difficile, dans la géométrie élémentaire, à démontrer rigoureusement. La vraie définition, ce me semble, continue ce grand géomètre, et la plus nette qu'on puisse donner d'une parallèle, est de dire que c'est une ligne qui a deux de ses points également éloignés d'une autre ligne : il faut ensuite démontrer (et c'est-là le plus difficile) que tous les autres points de cette seconde seront également éloignés de la ligne droite donnée. C'est cette définition de d'Alembert que nous avons eu en vue, sans prétendre avoir absolument levé toute difficulté. Euclide déduit la théorie des parallèles de la proposition suivante qu'il regarde comme un
Fig. 17. axiôme : *Si les deux lignes* AB, CD, *forment avec la ligne* HF, *qui les coupe toutes deux, des angles intérieurs* BNM, DMN, *tels que leur somme soit plus petite que deux angles droits, les deux lignes se rencontreront.* Quoique cette proposition soit vraie, elle n'est pas assez évidente pour être mise au rang des axiômes. Legendre, qui a adopté la méthode d'Euclide, l'a démontrée rigou-

reusement (prop. 20 et 22, liv. 1[er]). Au reste la démonstration des propositions les plus simples, laisse souvent quelque chose à desirer du côté de la rigueur; mais leur énoncé, dit Laplace, produit la conviction la plus entière; il ne faut donc pas dans l'enseignement insister sur ce qui peut manquer encore à la rigueur des preuves que l'on en donne, et l'on doit abandonner cette discussion aux métaphysiciens géomètres, du moins jusqu'à ce qu'elle soit suffisamment éclaircie, pour ne laisser aucun nuage dans l'esprit des commençans.

Problêmes relatifs aux articles précédens.

68. *Problême premier.* Diviser une ligne donnée AB en deux parties égales.

Des points A et B comme centres, et avec un rayon plus grand que la moitié de AB, décrivez au-dessus et au-dessous de AB deux arcs qui se coupent en D et M, par les deux points d'intersection; menez la ligne droite DM, elle coupera la ligne AB en deux parties égales. Fig. 19.

Car les deux points D, M sont à égale distance des extrémités A, B (43); donc tous les points de la ligne DM, doivent être également distans de A et B (14); donc on a $AI = IB$.

69. *Problême deuxième.* Par un point donné A sur une ligne, élever une perpendiculaire à cette ligne. Le point A étant donné, il suffit d'en déterminer un autre par où la perpendiculaire doit passer. Fig. 20.

Prenez de part et d'autre de A, les points B et D également éloignés de A, des points B et D comme centres, et d'un rayon plus grand que AB ou AD, décrivez deux arcs qui se coupent; par

le point d'intersection et le point *A*, menez la ligne *MA*, elle sera la perpendiculaire demandée ; car cette ligne aura deux points à égale distance de *B* et *D*; donc tous les autres le seront aussi (45).

70. *Problème troisième.* D'un point donné *A* hors d'une ligne, abaisser une perpendiculaire sur cette ligne.

Fig. 21. Du point *A* comme centre, et d'un rayon quelconque, décrivez un arc qui coupe la ligne *BD* en deux points *C*, *F*; cherchez un point *E* également éloigné de *C* et *F* (43) ; par les deux points *A*, *E*, menez la ligne *AE*, elle sera perpendiculaire sur *BD* (31).

71. *Problème quatrième.* Par un point donné *A*, mener une parallèle *BC*.

Fig. 22. Du point *A* abaissez une perpendiculaire sur *BC*, et d'un autre point quelconque *c* pris sur la ligne *BC*, élevez une perpendiculaire *CN* égale à la première. Par les points *A* et *N*, menez *AN*, elle sera parallèle à *BC* (63).

ARTICLE SECOND.

Des lignes droites considérées dans le cercle.

72. Les lignes droites considérées dans le cercle, se nomment cordes, tangentes ou sécantes, selon les trois différentes positions qu'elles ont par rapport au cercle.

73. *Théoréme.* Une ligne droite ne peut rencontrer une circonférence de cercle, en plus de deux points ; car tous les points d'intersection de la ligne droite avec la circonférence seroient également éloignés du centre ; donc on pourroit me-

ner d'un même point sur une même ligne plus de deux obliques égales, ce qui est démontré impossible (51).

74. *Théorême.* Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les arcs égaux sont soutendus par des cordes égales, et réciproquement les cordes égales soutendent des arcs égaux.

Car, 1°. si l'arc $AB =$ l'arc CD, en posant le point C sur le point A, tous les points de l'arc CD, coïncideront avec leurs correspondans dans l'arc AB; donc le point D tombera sur le point B; donc la corde CD se confondra avec la corde AB. Fig. 25.

2°. Si la corde $CD =$ la corde AB, l'arc $DOC =$ l'arc BMA.

Car en posant le point C sur le point A, et le point D sur le point B, si le point O ne coïncidoit avec son correspondant M, soit mené du centre un rayon à chacun des correspondans, il est évident que ces deux rayons seroient inégaux; donc le point O et le point B, n'appartiendroient pas à la même circonférence, ou à des circonférences égales, ce qui est contre la supposition.

75. *Théorême.* Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, le plus grand arc est soutendu par la plus grande corde, et réciproquement à la plus grande corde répond le plus grand arc. Fig. 25.

Car soient les deux arcs inégaux, BA, BQ, soit pris $BP = BA$ en posant l'arc BA sur BQ, le point B tombera sur P, et la corde $BP = BA$ (14); du point B comme centre soit décrit l'arc PR, on aura $BR = BP = BA$; donc $BR + RQ > BA$. 2°. Si $BQ > BA$, l'arc BPQ sera $> BMA$; car l'arc $BPQ = BMA + PQ$; donc $BPQ > BMA$.

76. *Corollaire.* Le diamètre est la plus grande de toutes les cordes qu'on puisse mener dans le cercle, et la demi-circonférence est le plus grand de tous les arcs.

77. *Scholie premier.* Une corde soutend toujours dans un cercle deux arcs, un plus grand que la demi-circonférence, et l'autre plus petit; mais quand on parle d'un arc soutendu par une corde, on entend toujours le plus petit.

78. *Scholie deuxième.* Quoique les cordes croissent à mesure que les arcs croissent, elles ne suivent pas cependant le même rapport que les arcs, c'est-à-dire qu'un arc double n'est pas soutendu par une corde double, ni un arc triple par une corde triple.

En effet, l'arc $ABP = 2$ arcs AB; mais la corde AP n'égale pas $2\ AB$; car on a $2\ AB = AB + BP$: or, $AP < AB + BP$ (10); donc, etc.

79. *Théorème.* Tout rayon CR, perpendiculaire sur une corde AB, partage la corde, et l'arc soutendu par la corde en deux parties égales.

Fig. 24. Car le point C est à égale distance de A et de B : en second lieu, la ligne CR est perpendiculaire sur AB; donc tous ses points sont également éloignés de A et de B; donc on aura $AD = DB$.

Par la même raison, la corde $AR =$ la corde BR; donc l'arc $AR =$ arc BR (74).

80. *Théorème.* Toute ligne DR, perpendiculaire sur le milieu d'une corde AB, prolongée, passe par le centre du cercle.

Car les points R et D sont à égale distance des points A et B, et de plus la ligne RD est perpendiculaire; donc elle doit passer par tous les points également éloignés de A et B; donc elle passe par le centre C.

81. *Théorême.* Tout rayon qui coupe une corde en deux parties égales est perpendiculaire sur cette corde.

Car le centre est à égale distance de A et B, et le point D est aussi à égale distance de A et B par la supposition; donc la ligne CD ne penche pas plus du côté A que du côté B; donc elle est perpendiculaire sur AB.

82. *Corollaire premier.* Une droite qui a deux de ces conditions, être rayon ou diamètre, être perpendiculaire sur une corde, la couper en deux parties égales, a nécessairement la troisième.

83. *Corollaire deuxième.* Le centre du cercle, le milieu d'une corde, et le milieu de l'arc sont toujours sur une même ligne.

84. *Théorême.* La tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contingence.

Soient menées du centre C des lignes telles que CI à tous les points de la tangente, il est évident que CR sera la plus courte de ces lignes; car l'on a $CR = CO$; donc $CR < CO + OI$; donc CR est perpendiculaire sur AB, et réciproquement (52). Fig. 25.

85. *Corollaire.* La tangente menée au point R est parallèle à la corde AB perpendiculaire au rayon (64), et les deux arcs compris entre une corde et une tangente parallèles sont égaux (79). Fig. 24.

86. *Théorême.* Par un point donné R, on ne peut mener qu'une seule tangente RB à la circonférence.

Car si on en pouvoit mener un autre différente de RB, elle ne seroit pas perpendiculaire sur CR (51); donc le rayon CR ne seroit pas la ligne la plus courte qu'on pourroit mener du centre sur Fig. 24.

cette tangente; donc elle entreroit dans le cercle, et seroit sécante.

87. *Scholie.* La propriété que nous venons de démontrer, distingue toujours les tangentes de toutes les autres lignes; c'est aussi celle d'où sont partis les anciens géomètres, lorsqu'ils ont cherché à déterminer les tangentes des courbes. Suivant eux une ligne droite est tangente d'une courbe, lorsqu'ayant un point commun avec la courbe, on ne peut mener par ce point aucune autre droite entr'elle et la courbe. Mais depuis que par l'application de l'algèbre à la géométrie les courbes ont été soumises à l'analyse, on a envisagé les tangentes comme les limites des sécantes, c'est-à-dire, comme des sécantes dont les deux points d'intersection sont réunis (26); la démonstration du théorême précédent suffit pour apprécier la rigueur des anciennes définitions, et les conséquences que nous verrons en découler.

88. *Théorême.* De toutes les sécantes extérieures AP, AN, tirées d'un même point à la circonférence convexe du cercle, la plus courte est celle qui, prolongée, passeroit par le centre.

Fig. 26. Soit tiré le rayon CN, on a $AP + CP < AN + CN$, mais $CP = CN$; donc $AP < AN$: 2°. si on les mène à la circonférence concave, la plus longue est celle qui, prolongée, passe par le centre.

Car l'on a $AC + CM > AM$; mais $CM = CB$; donc $AB > AM$.

89. *Théorême.* De toutes les sécantes intérieures NB, NM menées du même point pris au-dessous du centre, à la circonférence, la plus courte
Fig. 27. est celle qui, prolongée, passeroit par le centre, et si on les mène d'un point pris au-dessus du centre, la plus longue est celle qui passe par le centre.

1°. Soit tiré le rayon $CM = CB$, on a $CM = BN + CN < MN + CN$; donc $BN < NM$: 2°. soient menées MP et CP, on a $MC + CP > MP$; mais $MC + CP = PB$, donc $PB > MP$.

90. *Théorême*. Par un point R, on peut faire passer une infinité de circonférences différentes.

Soit pris pour centre un point quelconque P, ou N, au-dessus ou au-dessous de C, et pour rayon la ligne PR, ou NR, il est évident que toutes ces circonférences passeront par le point R; mais elles n'auront que ce point commun; car pour tout autre point, on aura $PR > PO$ (89) pour le premier cas, où $PR = PK$; donc $PK > PO$.... Si le centre est pris au-dessous de IC, on a $NR < NL$; mais $NR = NK$; donc $NK < NL$. Fig. 18.

91. *Corollaire*. La ligne RI perpendiculaire à l'extrémité du rayon CR est tangente à tous les cercles qui ont leur centre sur la ligne CR, et qui passent par le point R.

92. *Scholie*. Toutes les circonférences dont le centre sera pris au-dessus de C, passeront entre la tangente et le cercle A, et celles dont le centre sera pris au-dessous de C passeront en dedans du cercle A.

A proprement parler, ces circonférences ne coïncident que dans le point R; mais plus le centre se rapprochera de C, plus les circonférences décrites se rapprocheront dans les autres points du cercle A.

93. *Théorême*. Deux cordes parallèles AB, MN, interceptent sur la circonférence des arcs égaux MA, BN.

Menons le rayon CR perpendiculaire sur les deux parallèles, on aura l'arc MR = arc NR (79), Fig. 14.

par la même raison $AR = BR$; donc $MR - AR = NR - BR$ ou $MA = NB$.

94. *Théorème.* Deux diamètres AB, ED qui se coupent au centre du cercle, interceptent sur la circonférence des arcs égaux AE, BD.

Fig. 29. Car l'arc $ADB = DAE$ (76); retranchant des deux côtés l'arc commun AD, il restera arc $DB =$ arc AE.

95. *Théorème.* Si deux cordes CP, DQ se coupent dans un cercle, la somme des deux arcs CD PQ interceptés par leur prolongement, est égale à la somme des deux arcs $AB + MN$ interceptés

Fig. 30. par les deux diamètres parallèles aux cordes.

Car on a $AB + BC = QP + QM$, et $MN + MQ = CD + BC$ (93); ajoutant les deux équations et réduisant, on a $AB + MN = CD + PQ$.

96. *Scholie.* Si les deux cordes devenoient sécantes SP, SQ, leur prolongement jusqu'à la rencontre de l'arc convexe seroit négatif, et l'arc convexe seroit considéré comme négatif par rapport à l'arc concave; c'est-à-dire que la différence de l'arc concave sur l'arc convexe, intercepté entre les deux sécantes, est égal à la somme des deux arcs interceptés par les deux diamètres parallèles aux sécantes.

En effet, on a $QP + PM = AB + BD + DC$, et $BD = PM + MN$; donc $PQ - CD = AB + MN$.

97. *Théorème.* Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les angles égaux ACB, DCE, dont le sommet est au centre, interceptent sur la circonférence des arcs égaux AB, DE.

Fig. 31. Et réciproquement si les arcs AB, DE sont égaux, les angles ACB, ACE le seront aussi.

Car 1°. si l'angle $ACB = DCE$, en plaçant le

côté CD sur le côté CA, le second côté CE tombera sur CB, et parce que les côtés sont rayons de cercles égaux, le point D tombera sur le point A, et le point E sur le point B; donc la corde $DE = AB$, et l'arc $DE =$ arc AB (74).

2°. Si on suppose l'arc $DE =$ arc AB, je dis que l'angle $ACB = DCE$; car si ces angles n'étoient pas égaux, soit ACB le plus petit, ajoutons lui BCI, pour qu'il devienne égal à DCE, on aura l'arc $ABI = DE$ par la première partie du théorême, mais $AB = DE$ par la supposition; donc on auroit $ABI = AB$, ce qui est absurde.

98. *Théorême.* Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, si deux angles au centre ACB, DCE sont entr'eux comme des nombres entiers, les arcs interceptés AB, DE seront entr'eux comme Fig. 52. les mêmes nombres, et on aura la proportion : angle ACB : angle DCE :: arc AB : arc DE.

Supposons que l'angle M que nous prendrons pour terme de comparaison soit contenu un certain nombre de fois sans reste dans l'angle ACB, et un autre nombre de fois sans reste dans l'angle DCE, les angles partiels ACm, mCn.... etc. seront égaux entr'eux aussi bien que les arcs partiels Am, mn.... etc. (97); donc l'arc entier AB contiendra l'arc Am autant de fois que l'angle ACB contiendra l'angle M; par la même raison l'arc entier DE contiendra l'arc Am autant de fois que l'angle DCE contiendra l'angle M, on aura donc les deux proportions

arc AB : arc Am :: angle ACB : angle M
arc DE : arc Am :: angle DCE : angle N.

Les deux conséquens de la première proportion sont les mêmes que ceux de la seconde; donc les antécédens formeront la proportion suivante : arc AB : arc DE :: angle ACB : angle DCE.

99. *Théorême.* Quel que soit le rapport incommensurable des angles ACB, ACD, les deux angles sont entr'eux comme les arcs AB, AD, interceptés entre leurs côtés et décrits de leurs sommets comme centre avec des rayons égaux.

Fig. 25. Divisons le plus petit des angles ACB, en un très-grand nombre de parties égales, et prenons un de ces petits arcs pour terme de comparaison, en la portant successivement sur l'angle ACB, il y sera contenu un certain nombre de fois, plus un reste BI, incommensurable et plus petit que l'angle de comparaison, on aura donc la proportion $ACI:ACD:AI:AD$, ou $ACB-ICB:ACD :: AB-IB:AD$; cette proportion sera vraie, quelque petit que soit l'angle de comparaison; et comme l'angle ICB et l'arc IB doivent être encore plus petits, il s'ensuit qu'on peut les supposer moindres qu'une quantité assignable, c'est-à-dire zéro, donc la proportion deviendra (3. 111.) $ACB:ACD :: AB:AD$.

100. *Scholie.* Mesurer une grandeur, c'est la comparer à une autre grandeur de même nature, et l'expression numérique de cette comparaison est toujours un nombre abstrait. Sur ce principe, il paroîtroit plus naturel de mesurer les angles en les rapportant à un même angle qu'on prendroit pour terme de comparaison, ou pour unité de mesure. Mais parce que le rapport qui existe entre deux angles est le même que celui qui a lieu entre les arcs décrits d'un même rayon et compris entre les côtés des angles (99), il a paru plus commode de substituer le rapport des arcs à celui des angles.

On a divisé pour cela la circonférence de cercle en 360 parties égales qu'on a nommées degrés. Le quart de la circonférence est donc de 90 degrés, et l'arc d'un degré est l'arc compris entre deux lignes dont

dont l'inclinaison respective est la quatre-vingt-dixième partie d'un angle droit.... L'angle de 30 degrés est celui qui intercepte entre ses côtés le tiers de 90 degrés, il est donc lui-même le tiers de l'angle droit.... Le degré a été subdivisé en 60 minutes, la minute en 60 secondes afin d'éviter les fractions dans la mesure des angles.

Dans le nouveau système des poids et mesures, pour conformer la division du quart de cercle des astronomes à celle du quart du méridien, on a divisé le cercle en 400 parties; le degré a été divisé en 100 parties appelées minutes, et la minute en 100 parties appelées secondes; de cette manière le quart de cercle renferme 100 degrés. Le degré ancien vaut $1^d, 1111....$ décimal, et le degré décimal vaut 0,9 du degré ancien, c'est-à dire, que pour convertir un degré ancien en degré décimal, il faut lui ajouter la neuvième partie du degré ancien; et pour convertir le degré décimal en degré ancien, il faut en retrancher la dixième partie, ainsi 27 d'anciens valent $27 + 3 = 30^d$ décimaux, et 30^d décimaux valent $30 - \frac{30}{10} = 27^d$ anciens.

On peut aussi regarder le degré décimal comme la centième partie du quart de cercle, ainsi le quart de cercle étant 1, 9^d anciens valent 10^d décimaux, ou $9^d = 0,1$ du quart de cercle.... $54' = 0,01....$ $27' = 0,00,5.... 5', 24'' = 0,001, 32'' 24''' = 0,0001$, c'est-à-dire qu'un degré nouveau vaut $54'$ anciennes, une minute nouvelle vaut $32'' 24'''$ de la division ancienne.

101. *Théorême.* Si deux parallèles AB, CD, sont coupées par une oblique HF qu'on nomme sécante, les deux angles aigus HNB, ANM, formés par la sécante sur la première parallèle, seront égaux entr'eux, et aux deux aigus HMD,

Fig. 17. CMF, formés par la même sécante sur la seconde parallèle.

Car 1°. l'on a $HNB = ANM$ et $HMD = CMF$, parce qu'ils sont opposés au sommet ; 2°. $ANM =$ l'angle HMD.

Pour le prouver soient décrits des centres M, N, et d'un même rayon NM les deux arcs indéfinis MAQ, NDS : des points M, N, menons les cordes MQ, NS, perpendiculaires sur AB, CD, l'on aura 1°. $MO = NI$, par la propriété des parallèles ; 2°. $MO = OQ$ et $NI = IS$ (79) ; donc l'arc $MAQ =$ l'arc NBS (74), et $\frac{MAQ}{2} = \frac{NBS}{2}$ ou $MA = ND$; or, MA mesure l'angle ANM, et ND mesure l'angle HMD ; donc.... etc.

Même démonstration pour les angles obtus ANH, BNM, CMN, DMF.

102. *Scholie.* Il suit du théorême précédent, que deux angles aigus ou deux angles obtus pris sur chaque parallèle, sont égaux.

On donne différens noms à ces angles comparés deux à deux.

On nomme *internes externes* ceux qui sont formés du même côté de la sécante, l'un en dedans, l'autre en dehors des parallèles ; tels sont les angles HNB, HMD, ou HNA, HMC.

On nomme *alternes internes* ceux qui sont formés des différens côtés de la sécante, tous les deux en dedans des parallèles ; tels sont BNM, CMN, ou ANM, DMN.

Les angles *alternes externes* sont ceux qui sont formés de différens côtés de la sécante, mais en dehors des parallèles ; tels que HNB, CMF, ou ANH, DMF.

Enfin les angles formés d'un même côté de la sécante et en dedans des parallèles, sont dits intérieurs; tels sont BNM, DMN, ou ANM, CMN.

Ainsi donc lorsque deux parallèles sont coupées par une oblique, 1°. les angles alternes internes sont égaux : car l'on a $ANM = DMN$, par le théorême précédent.

2°. Les angles internes externes sont égaux, car l'on a $ANM = HNB$; donc $DMN = HNB$.

3°. Les angles alternes externes sont égaux; car l'on a $CMF = DMN$; donc $CMF = HNB$.

4°. La somme des deux angles intérieurs vaut toujours deux angles droits, car l'on a $BNH + BNM =$ deux angles droits: or, $BNH = DMN$; donc $DMN + BNM =$ deux angles droits.

Réciproquement si les angles ci-dessus nommés sont égaux, les lignes auxquelles ils se rapportent sont parallèles : car soit $BNH = DMN$, on en conclura $ANM = DMN$; donc l'arc $MA =$ l'arc ND, ou $2MA = 2MD$, et la corde $MQ =$ la corde NS ou $\frac{MQ}{2} = \frac{NS}{2}$; donc les deux points M, N sont équidistans, donc les deux lignes AB, CD, sont parallèles.

103. *Théorême.* Si deux angles BAC, DEF, ont les côtés parallèles chacun à chacun, et dirigés dans le même sens, ces deux angles seront égaux.

Prolongez le côté DE jusqu'en G, les angles DEF, DGC sont égaux (102); mais l'angle $DGC = BAC$, par la même raison; donc $DEF = BAC$. Fig 18.

Nota. Si les côtés n'étoient pas dirigés dans le même sens, comme EF, GA, les angles ne seroient pas égaux quoique les côtés fussent parallèles, mais on auroit dans ce cas la somme des deux $DEF + DGA = 2$ angles droits.

104. *Théorème.* Quelle que soit la position d'un angle par rapport au cercle, il aura pour mesure la moitié de la somme des deux arcs interceptés entre ses côtés prolongés en dessus et en dessous. Fig. 50.

1°. Si l'angle est au centre du cercle, les deux diamètres AM, BN en se coupant forment deux angles égaux (40), et interceptent des arcs égaux (94); les deux angles ARB, MRN réunis, ont pour mesure $AB+MN$ (100); donc un de ces angles seul aura pour mesure $\frac{AB+MN}{2}$.

2°. Si le sommet de ces angles est hors du centre, mais dans le cercle en O, par exemple, les deux angles QOP, COD, sont égaux entr'eux (40), et aux deux angles au centre formés par les deux diamètres parallèles aux cordes (103); donc ils ont même mesure, donc la mesure de $POQ = \frac{AB+MN}{2}$; mais $AB+MN=CD+PQ$ (95), donc $POQ=\frac{CD+PQ}{2}$.

3°. Si l'angle a son sommet sur la circonférence même du cercle, tel que $Q'O'P'$, l'arc $CD=0$, et l'on a toujours $P'Q'O'=MRN=\frac{0+P'Q'}{2}$.

4°. Enfin, si le sommet est hors du cercle et de la circonférence en S, on a toujours $PSQ=MRN$ et $\frac{AB+MN}{2}=\frac{PQ-DC}{2}$ (96), ce qui est toujours le même cas en prenant l'arc convexe négatif; donc, etc.... (1).

---

(1) Voici comme on peut concevoir que l'arc convexe doit être pris négatif.

Si l'on suppose que les points PQ conservant la même po-

105. *Scholie.* Un angle qui a son sommet dans le cercle et hors du centre est nommé *excentrique;* il a donc pour mesure la moitié de la somme des deux arcs compris entre ses côtés prolongés en dessus et en dessous.

Un angle qui a son sommet à la circonférence, est nommé un angle *inscrit;* il a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

Un angle qui a son sommet hors de la circonférence s'appelle *circonscrit*, et a pour mesure la moitié de la différence de l'arc concave sur l'arc convexe compris entre ses côtés.

106. *Corollaire premier.* Tous les angles *BAC*, *BDC*, inscrits dans les mêmes segmens, sont égaux; car ils ont pour mesure la moitié de *BOC*. Fig. 34.

107. *Corollaire deuxième.* Tout angle inscrit *BAD*, appuyé sur le diamètre, est un angle droit; car il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence ou le quart de la circonférence. Fig. 35.

108. *Corollaire troisième.* L'angle *CAE* formé par une tangente et une corde a pour mesure la moitié de l'arc soutendu par la corde, car c'est un angle inscrit; il a donc pour mesure la moitié de l'arc intercepté entre ses côtés. Fig. 36.

---

sition, le sommet *O* s'éloigne, en rapprochant de la circonférence, l'angle *QOP* diminuera, ainsi que l'arc *COD*. Lorsque le sommet *O* sera parvenu sur la circonférence en *O'*, l'arc *CD* sera zéro: si le sommet *O'* s'éloigne encore, et prend la position *S*, l'angle aura encore diminué, ainsi que l'arc qui lui sert de mesure; mais la partie *PQ* reste la même par la supposition; donc il faut que la diminution s'opère dans l'arc de dessus: or, cet arc est zéro, lorsque le sommet est en *O''*; donc s'il diminue encore, il sera au-dessous de zéro, c'est-à-dire, négatif.

On peut d'ailleurs appliquer à ce cas particulier la démonstration du cas général.

Car les deux diamètres BM, PN étant parallèles à la tangente AE et à la corde AC, l'angle $CAE = MDN$; donc il a pour mesure l'arc MN; or, l'on a $AC + CN = AB + BP$, et $CN + NM = AB$; donc $AC = BP + NM = 2NM$, donc $NM = \frac{AC}{2}$.

109. *Problème premier.* Diviser un arc ou un angle donné BAC en deux parties égales.

Fig. 37. Menez la corde BC du centre A, abaissez une perpendiculaire sur le milieu de la corde (70), cette perpendiculaire divisera l'arc et l'angle en deux parties égales (79).

110. *Problème deuxième.* Au point A de la ligne AD, faire un angle égal à un angle donné M.

Fig. 38. Du point M, comme centre, et d'un rayon arbitraire, décrivez l'arc NP; du point A, comme centre et d'un même rayon, décrivez l'arc indéfini DIO; prenez la corde $DI = PN$ par les points A et I, menez la ligne AI, l'angle DAI sera égal à l'angle M; car ils seront mesurés par des arcs égaux (74).

111. *Problème troisième.* Mener une perpendiculaire à l'extrémité d'une ligne donnée MB, d'un

Fig. 31. point quelconque C, comme centre, et d'un rayon égal à CB, décrivez une circonférence qui coupera la ligne donnée en un point A; par ce point et par le centre C, tirez le diamètre AD, de l'extrémité D, abaissez la ligne DB, elle sera la perpendiculaire demandée.

Car ABD sera un angle inscrit appuyé sur le diamètre; donc il sera droit (107), donc DB sera perpendiculaire à l'extrémité de MB.

112. *Problême quatrième.* D'un point donné A hors d'un cercle, mener une tangente à la circonférence du cercle. Fig. 39.

Du point A au centre, menez la droite CA sur cette ligne comme diamètre, décrivez la circonférence AMC, qui coupera le cercle donné en deux points M, N : du point A aux deux points d'intersection, menez les lignes AM, AN, elles seront tangentes au cercle demandé.

Car si du point C et du point A on mène les cordes CM, AM, l'angle AMC sera droit (107); donc AM sera perpendiculaire sur CM, donc elle sera la tangente demandée (84).

Ce problême, comme on voit, est susceptible de deux solutions, c'est-à-dire, que d'un point donné hors d'un cercle, on peut toujours mener deux tangentes à la circonférence.

113. *Problême cinquième.* Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés qui ne sont pas en ligne droite.

Joignez les points A, B, D par les deux lignes droites AB, BD; sur le milieu de ces droites élevez les perpendiculaires CG, CF, le point de rencontre C sera le centre du cercle cherché. Fig. 40.

Car par la propriété de la première perpendiculaire on a le point C à égale distance de A et B; par la propriété de la seconde perpendiculaire, le même point C est à égale distance de B et D; donc il est le centre de la circonférence qui passe par les points A, B, D.

114. *Corollaire premier.* La position et la grandeur d'une circonférence sont déterminées dès qu'on connoît son centre et son rayon : or, trois points donnés nous font connoître l'un et l'autre ; donc trois points qui ne sont pas en ligne droite déterminent la position et la grandeur d'un cercle.

115. *Corollaire deuxième.* Deux circonférences de cercle ne peuvent se couper en trois, car elles auroient trois points de commun, et par conséquent même centre et même rayon ; elles ne seroient donc qu'une seule et même circonférence.

116. *Problême sixième.* Un arc de cercle étant donné, trouver le centre de la circonférence à laquelle il appartient.

Fig. 41. Prenez à volonté trois points *A*, *B*, *C* dans cet arc, joignez-les par les deux cordes *AB*, *BC*, divisez ces cordes en deux parties égales, comme dans le problême précédent, le centre se trouvera au point de concours des deux lignes de division.

117. *Problême septième.* Trouver le rapport numérique de deux lignes droites données *AB*, *CD*, ou démontrer qu'elles sont incommensurables.

Fig. 42. Portez la plus petite *CD* sur la plus grande autant de fois qu'elle y est contenue, par exemple trois fois avec le reste *BE*....; portez le reste *BE* sur la ligne *CD*, autant de fois qu'il y est contenu, par exemple deux fois avec un reste *DF*....; portez ce second reste sur le premier *BE* autant de fois qu'il peut y être contenu, par exemple trois fois avec un reste *BG*....; portez le troisième reste sur le second, et continuez ainsi jusqu'à ce que vous ayez un reste qui soit contenu un certain nombre de fois juste dans celui qui le précède.

Alors ce dernier reste sera la commune mesure des lignes proposées : ainsi dans l'exemple cité, si l'opération se termine à la troisième division, la ligne *BG* sera la commune mesure des deux lignes proposées, et si *BG* est contenu cinq fois dans *FD*, en prenant *BG* pour l'unité, on trouvera que l'expression numérique du rapport de *AB* : *CD* est $\frac{117}{37}$.

Cette méthode qui nous vient d'Euclide (*Liv.* VII, *prop.* 2), est la même que celle qu'on suit en arithmétique pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres. On peut aussi y employer la suivante qui est plus simple et aussi directe.

En reprenant l'exemple ci-dessus, après avoir trouvé que la plus petite ligne CD est contenue trois fois dans la plus grande AB, et que le reste rentre deux fois dans la plus petite avec un nouveau reste 5, au lieu de rapporter ce second reste au précédent, comme on a fait par la première méthode, on peut le rapporter de nouveau à la plus petite ligne. On trouvera qu'il y est contenu sept fois avec un reste 2 ; on rapportera ce reste à la même ligne CD, et l'on trouvera qu'il y est contenu dix-huit fois avec un reste $1 = BG$, qui sera nécessairement la mesure commune.

Si on ne parvenoit jamais à un reste qui fût l'unité ou une partie aliquote de la ligne CD, les lignes AB, CD seroient incommensurables, on ne pourroit alors trouver le rapport exact des deux lignes, mais en négligeant le dernier reste on trouvera un rapport d'autant plus approché que l'opération aura été poussée plus loin. *Voyez les fractions continues* Arithmétique, *n°*. 72, *et* Algèbre, *n°*. 34, *et le Journ. Polytechnique, cinquième cahier, pag.* 99.

Ce que nous venons de dire pour trouver la commune mesure de deux lignes droites, a également lieu pour les arcs de cercle, les angles et généralement toutes les quantités homogènes que l'on compare ensemble; car un arc, par exemple, peut se porter sur un autre arc de même rayon, comme une ligne droite sur une autre ligne droite.

ARTICLE III.

Des figures.

118. Des lignes qui, en se réunissant par leurs extrémités, renferment un espace, forment une figure.

Les figures prennent différens noms suivant le nombre de leurs côtés.

Fig. 51. Une figure de 3 côtés se nomme.......triangle.
Fig. 53. de 4 côtés............quadrilatère.
Fig. 58. de 5 côtés.............pentagone.
Fig. 60. de 6 côtés..............hexagone.
de 7 côtés..............eptagone.
de 8 côtés.............octogone.

Une figure de plusieurs côtés en général un polygone.

La plus simple de toutes les figures est le triangle, parce qu'il faut au moins trois lignes droites pour renfermer un espace.

La plus composée des figures qu'on considère dans les ouvrages élémentaires, c'est le cercle, parce qu'il n'y en a pas qui ait plus de côtés que lui.

119. A proprement parler le cercle n'est pas un polygone rectiligne, puisqu'il ne peut pas être composé de lignes droites; quelque petites qu'on les suppose, il ne peut être considéré que comme la limite des polygones qu'on peut lui inscrire et circonscrire, c'est-à-dire que plus les polygones inscrits et circonscrits au même cercle ont de côtés, plus ils approchent de la courbe circulaire, sans pouvoir néanmoins se confondre avec elle. Mais comme rien ne limite le nombre des côtés des polygones qu'on peut inscrire et circonscrire au même

cercle, on peut le supposer si grand que la différence entre le polygone inscrit et circonscrit et le cercle, soit plus petite que toute grandeur donnée.

Des propriétés des triangles.

120. Le triangle est une figure terminée par trois lignes droites.

Le triangle prend différens noms suivant le rapport de ses côtés et la qualité de ses angles. Il s'appelle :

Equilatéral......... s'il a ses trois côtés égaux. Fig. 43.
Isocèle............... s'il a deux côtés égaux. Fig. 44.
Scalène............. s'il a trois côtés inégaux. Fig. 45.

Par rapport aux angles.

Rectangle................ s'il a un angle droit. Fig. 46.
Obtusangle.............. s'il a un angle obtus. Fig. 45.
Acutangle........... s'il a les trois angles aigus. Fig. 44.

Le côté opposé à l'angle droit dans un triangle, est appelé hypoténuse. Lorsqu'on compare deux triangles, on nomme côtés homologues ceux qui sont opposés à des angles égaux dans les deux triangles.

121. *Théorême.* Les trois angles d'un triangle pris ensemble valent deux angles droits.

Par un des angles C, soit menée la ligne DE parallèle au côté opposé AB, la somme des trois angles $DCA + ACB + BCE$, formés sur la ligne DE par la réunion des deux lignes $AC, BC =$ deux angles droits (36) : par la propriété des parallèles $DCA = CAB$ et $BCE = CBA$ (102) ; donc en substituant on a $CAB + ABC + ACB =$ deux angles droits. Fig. 47.

122. *Scholie.* L'angle droit est mesuré par un arc de 90^d lorsque le cercle est divisé en 360, et par un arc de 100^d lorsque le cercle est divisé en 400, c'est-à-dire selon la nouvelle division.

Donc les trois angles du triangle sont mesurés par 180^d dans le premier, et par 200^d dans le second. Le théorême précédent peut donc s'énoncer ainsi :

La somme des trois angles d'un triangle vaut toujours 180^d ou deux angles droits.

123. *Corollaire premier.* Dans un triangle il ne peut y avoir qu'un angle droit, car s'il y en avoit deux, le troisième seroit zéro ; donc les deux côtés ne se réuniroient pas.

124. *Corollaire deuxième.* Dans un triangle il ne peut y avoir qu'un angle obtus ; car s'il y en avoit deux, leur somme seroit plus grande que deux angles droits, et à plus forte raison la somme des trois angles.

125. *Corollaire troisième.* Lorsqu'un triangle est rectangle, ou a un angle droit, la somme des deux autres égale un angle droit, et chacun de ces deux angles est dit le complément de l'autre.

126. *Corollaire quatrième.* Un triangle quelconque peut toujours être coupé en deux triangles rectangles, en abaissant une perpendiculaire du sommet d'un angle sur le côté qui lui est opposé.

127. *Corollaire cinquième.* Si l'on connoît les deux angles d'un triangle, le troisième est aussi connu : car il est ce qui manque aux deux autres pour valoir deux angles droits. C'est ce que l'on appelle le supplément.

128. *Théorême.* Dans un triangle l'angle exté-
Fig. 48. rieur formé par un côté et le prolongement d'un autre côté, est égal à la somme des deux angles intérieurs qui lui sont opposés.

Car les deux angles $CBN + CBA =$ deux angles droits (36); mais $CBA + CAB + ACB =$ aussi deux angles droits, d'où retranchant CBA de part et d'autre, on a $CBN = CAB + ACB$.

129. *Corollaire.* La somme des trois angles extérieurs d'un triangle est égale à quatre angles droits; car chaque angle extérieur avec son intérieur adjacent vaut deux angles droits (36); donc la somme totale des intérieurs et des extérieurs vaut six angles droits, mais la somme des trois intérieurs vaut deux angles droits; donc la somme des extérieurs en vaut quatre.

130. *Théorême.* Dans un triangle scalène, au plus grand angle est opposé le plus grand côté, et Fig. 49.
au plus petit angle est opposé le plus petit côté, et réciproquement.

Car on peut toujours faire passer une circonférence de cercle par les trois angles d'un triangle ABC; les trois côtés du triangle seront les cordes qui soutendront les arcs opposés aux angles : mais au plus grand angle est opposé le plus grand arc, et par conséquent, la plus grande corde, et au plus petit angle est opposé le plus petit arc, et par conséquent la plus petite corde (75); donc.... etc.

Réciproquement le plus grand côté soutendra le plus grand arc, lequel mesurera nécessairement le plus grand angle, et le plus petit côté soutendra le plus petit arc, lequel mesurera le plus petit angle.

131. *Corollaire.* Dans le triangle isocèle ACB, les deux côtés égaux seront opposés à des angles égaux; car ils soutendront des arcs égaux, lesquels mesureront par conséquent des angles égaux.

Dans le triangle équilatéral, les trois angles seront égaux puisque les côtés le sont. Fig. 45.

Nota. Il ne faudroit pas conclure cependant généralement que les côtés sont proportionnels aux angles, et les angles aux côtés (78).

ARTICLE IV.

De l'égalité des triangles.

132. Deux triangles sont égaux si, en supposant qu'on les pose l'un sur l'autre, on peut prouver qu'ils coïncident dans tous leurs points. Fig. 51.

Pour juger de l'égalité de deux triangles, il suffit de comparer les trois côtés et deux angles d'un triangle avec les trois côtés et deux angles du second triangle : parce que deux angles étant donnés, le troisième l'est aussi nécessairement ; or, si de ces cinq choses, trois côtés et deux angles, trois dans un triangle sont égaux aux trois homologues dans un autre triangle, les deux triangles seront égaux en tout. C'est ce que nous allons démontrer dans les théorêmes suivans.

Fig. 51. 133. *Théoréme.* Deux triangles ABC, abc, qui ont leurs côtés homologues égaux, sont égaux en tout.

Des points A et B et d'un rayon $AC = ac$, et $BC = bc$, décrivez deux arcs mCn, eCf, qui se coupent au point C, posez le point a sur le point A, et le point b sur le point B : le point c tombera nécessairement sur le point C, car il doit tomber sur un des points de l'arc mCn, puisque $AC = ac$, il doit tomber aussi sur un des points de l'arc eCf, puisque $BC = bc$; donc il doit tomber sur le point C, commun aux deux arcs, donc le côté ab coïncidera avec AB, ac avec AC, et bc avec BC; donc les deux triangles seront égaux.

134. *Théorême.* Deux triangles qui ont deux angles égaux chacun à chacun et le côté compris entre ces angles égal de part et d'autre, sont égaux entr'eux.

Posez le point *a* sur le point *A*, et le point *b* sur le point *B*; la ligne *ab* coïncidera avec *AB* par la supposition. Si l'angle $a = A$ et l'angle $b = B$, il est évident que le côté *ac* prendra la direction *AC*, et le côté *bc* la direction *BC*; mais ces deux côtés se réunissent au point *c*; donc le point *c* devra se trouver sur la réunion de deux côtés *AC*, *AC*; donc il tombera sur le point *C*; donc tout le triangle *abc* coïncidera parfaitement avec tout le triangle *ABC*. Fig. 51.

135. *Théorême.* Deux triangles qui ont deux angles égaux, et le côté opposé à l'un de ces angles égal de part et d'autre, sont égaux en tout.

Car si deux angles d'un triangle sont égaux aux deux angles correspondans d'un autre triangle, le troisième angle est égal de part et d'autre (127); donc le côté égal se trouvera compris entre deux angles égaux, et ce cas rentrera dans le théorême précédent.

136. *Théorême.* Deux triangles qui ont deux côtés égaux, et l'angle compris entre ces côtés égaux, égal de part et d'autre, sont égaux en tout.

Posez le point *c* sur *C*, et *a* sur *A*, les côtés *AC*, *ac* coïncideront par la supposition. Si l'angle $c = C$ le côté *cb* prendra la direction *CB* : or, ces deux côtés sont supposés égaux; donc le point *b* tombera sur le point *B*; donc le triangle *abc* coïncidera parfaitement avec le triangle *ABC*. Fig. 52.

137. *Théorême.* Deux triangles qui ont deux côtés égaux, et un angle opposé à l'un des côtés

égaux, égal de part et d'autre, sont égaux, pourvu que le second angle opposé à l'autre côté égal, soit de même espèce dans les deux triangles. Fig. 52.

Soit $ac = AC$, $bc = BC$, et l'angle $a = A$: du point c comme centre, et du rayon $CB = cb$, décrivez l'arc BM, qui coupe la ligne AB en deux points B et M.

Posez le point a sur A, et c sur C qui coïncideront par la supposition, et le côté ab prendra la direction AB, parce que l'angle $a = A$: le point b devra se trouver sur un des points de l'arc BM, puisque $cb = CB$; de plus, il sera aussi sur un des points de la ligne AB, puisqu'il appartient aussi à la ligne ab ; donc il sera sur un des deux points B ou M ; mais l'angle b est supposé de même espèce que B ; donc le point b tombera sur B, si les deux angles sont aigus, et sur M, s'ils sont obtus.

138. *Corollaire premier.* Deux figures quelconques qu'on peut partager en un égal nombre de triangles égaux, sont égales.

139. *Corollaire deuxième.* De l'égalité des triangles, on peut conclure que deux parallèles AB, CD, comprises entre deux autres parallèles BD, AC, sont égales ; car si on mène les perpendiculaires AM, DN, on aura les deux triangles ABM, CDN, qui auront, 1°. un angle droit chacun ; 2°. l'angle $MAB = NDC$ (103) ; 3°. $AM = DN$; donc les deux triangles ont deux angles égaux, et le côté compris égal ; donc ils seront égaux en tout ; donc $AB = CD$. Fig. 57.

ARTICLE

ARTICLE V.

Des Polygones et de leurs principales propriétés.

140. On distingue trois sortes de polygones, les irréguliers, les symétriques et les réguliers.

Les polygones irréguliers sont ceux qui ont des angles et des côtés inégaux.

Les polygones symétriques sont ceux dont les côtés opposés sont parallèles et égaux.

Les polygones réguliers ont tous leurs côtés et tous leurs angles égaux.

La plus simple des figures régulières est le triangle équilatéral.

Un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles, se nomme rhombe (1). Fig. 55.

Si le quadrilatère est régulier, il se nomme quarré. Fig. 55.

S'il est irrégulier, ayant deux côtés parallèles, c'est un trapèze. Fig. 54.

Si le quadrilatère a ses côtés égaux et parallèles, et les angles égaux deux à deux, c'est un lozange. Fig. 56.

Le quadrilatère qui a les quatre angles droits, est appelé rectangle. Fig. 57.

Toute ligne qui traverse un polygone, en allant d'un angle à un autre, se nomme diagonale.

---

(1) On nomme ordinairement parallélogramme, le quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. Mais cette dénomination ne convient pas plus à la figure de quatre côtés, que de six ou de huit : nous croyons devoir adopter la dénomination de rhombe que Legendre lui a donnée ; nous en ferons de même pour quelques autres expressions qui tendent à donner au langage géométrique plus d'exactitude et de précision. (*Voyez la Géométrie de Legendre.*)

141. *Théorême.* Un polygone quelconque peut toujours être divisé en autant de triangles qu'il a de côtés.

Fig. 58. D'un point quelconque M pris dans le polygone, on peut tirer des lignes droites MC, MD..... à tous les angles ou pointes du polygone.: chaque côté du polygone sera la base d'un triangle; donc il y aura autant de triangles que de côtés.

142. *Théorême.* La somme de tous les angles formés par la réunion de deux côtés consécutifs du polygone, égale autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés, moins deux.

Fig. 60 et 58.

Car si d'un point quelconque O, du polygone on tire des lignes aux angles du polygone ou aux *pointes*, on formera autant de triangles que le polygone a de côtés, et la somme des angles de tous ces triangles sera la même que celle des angles du polygone, plus celle des angles formés autour du point O; cette somme égalera donc deux angles droits pris autant de fois qu'il y a de triangles ou de côtés; mais la somme des angles autour du point O, vaut quatre angles droits (42); donc si on retranche cette somme de la somme totale, on aura pour la somme des angles intérieurs du polygone, autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.

143. *Corollaire premier.* Si le polygone est régulier, chaque angle intérieur égalera la somme totale divisée par le nombre des angles, ou des côtés: ainsi,

Dans le triangle équilatéral, chaque angle est de .... $\frac{180^d}{3} = 60^d$.

Dans le quarré, on a......... $\frac{2 \times 180^d}{4} = 90^d$.

Dans le pentagone, on a ...... $\frac{3 \times 180^d}{5} = 108^d$.

Dans l'hexagone, on a .... $\frac{4 \times 180^d}{6} = 120^d$.

Et ainsi des autres polygones réguliers.

144. *Corollaire deuxième.* La somme des angles extérieurs formés par chaque côté du polygone DC et le prolongement du consécutif FD, vaut toujours quatre angles droits ou 360^d..... ; car chaque intérieur FDC avec son extérieur adjacent CDH, vaut deux angles droits, donc les intérieurs et les extérieurs valent ensemble 180^d pris autant de fois qu'il y a de côtés. Mais les intérieurs seuls valent 180^d autant de fois qu'il y a de côtés, moins 360^d ; donc la somme des extérieurs $CDN + BCG$.... est 360^d. Fig. 58.

145. *Scholie.* La proposition démontrée dans le théorême précédent est également vraie pour les polygones irréguliers, pourvu qu'on ait soin d'exclure ceux qui ont des angles rentrans ; c'est-à-dire qui peuvent être rencontrés en plus de deux points par une ligne droite. Si le polygone a des angles rentrans, la somme des angles extérieurs formés par la réunion de deux côtés du polygone, plus la somme des angles rentrans $= 4$ angles droits, plus deux angles droits répétés autant de fois qu'il y a d'angles rentrans. Fig. 59.

Soit en effet le polygone $ABCDF$, la somme de ses angles extérieurs sera 4 angles droits. Supposons que le côté BC devienne BMC, la somme des angles extérieurs augmente de la somme des deux angles $MBC + MCB = 2$ angles droits — l'angle M. On peut en dire autant de chaque angle rentrant, d'où on peut conclure que la somme des angles extérieurs, plus celle des angles rentrans,

égale quatre angles droits, plus deux angles droits répétés autant de fois qu'il y a d'angles rentrans.

146. *Corollaire troisième.* Dans un polygone qui n'a point d'angles rentrans, la somme des angles extérieurs est égale à la somme des angles au centre : car l'une et l'autre vaut 360^d, et quand le polygone est régulier, chaque angle extérieur *CDH* est égal à l'angle au centre *O*.

Fig. 60. 147. *Théorême.* Si des pointes d'un polygone régulier on mène les lignes *DO*, *EO*, *GO* qui partagent en deux parties les angles intérieurs du polygone, ces lignes, prises des pointes jusqu'au point de rencontre, seront égales.

Car l'angle $ODE = OED$, puisqu'ils sont moitié d'angles égaux; donc le triangle *ODE* est isocèle (131) : par la même raison *E O G*, *G O A*, sont isocèles; donc les lignes *OD*, *OE*, *OG*..... etc. sont égales.

148. *Corollaire.* Tout polygone régulier peut être inscrit à un cercle, car si du point de concours *O* et d'un rayon $= OD$ on décrit une circonférence, elle passera par toutes les pointes du polygone; le point *O* sera le centre du polygone.

149. *Théorême.* Si du centre du polygone on abaisse des perpendiculaires *OM*, *ON*, sur les côtés *DE*, *EG*, ces perpendiculaires seront égales entre elles.

Fig. 60. Car 1°. les deux triangles *OEM*, *OEN*, auront un angle droit chacun; 2°. $OEM = OEN$; 3°. le côté *OE* est commun aux deux triangles; donc $OM = ON$ (135).

150. *Corollaire.* Tout polygone régulier peut être circonscrit au cercle; car si du centre *O* du polygone et d'un rayon $= OM$, on décrit une cir-

conférence, elle passera par les points $M, N\ldots$, milieu des côtés DE, EG.

Les lignes OD, OE sont nommées les rayons obliques du polygone, et les perpendiculaires OM, ON, en sont les rayons droits, ou apothêmes.

151. *Scholie.* Le triangle équilatéral étant un polygone régulier, peut être inscrit et circonscrit à un cercle; et non-seulement le triangle équilatéral jouit de cette propriété, mais encore un trian- Fig. 61. gle quelconque isocèle ou scalène. Car 1°. on peut toujours faire passer une circonférence de cercle par trois points non posés en ligne droite; donc on pourra inscrire un triangle quelconque dans un cercle. 2°. Si on divise deux angles d'un triangle en deux parties égales par les lignes AO, BO, et que du point du concours des deux lignes on abaisse les trois perpendiculaires OM, ON, OP, sur les trois côtés, ces trois perpendiculaires seront égales. Car 1°. les deux triangles OAM, OAN, seront égaux (135); donc $OM = ON$. 2°. Les deux triangles OBN, OBP, seront égaux pour la même raison; donc $ON = OP$. Donc si du point O, comme centre, et d'un rayon $= OM$, on décrit une circonférence, elle touchera les trois côtés aux points M, N, P; donc, etc.

152. *Théorême.* Le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle circonscrit.

Car dans l'hexagone l'angle à la circonférence Fig. 60. $EDC = 120^d$ (143), donc $CDO = 60^d$, par la même raison $DCO = 60^d$, donc $DCO = 60^d$, donc le triangle OCD est équilatéral (131), c'est-à-dire que $OD = DC$.

ARTICLE VI.

De l'assortissement ou assemblage des figures.

153. Lorsqu'on assortit les figures, on les réunit par leurs angles, et pour que les figures qu'on réunit ne laissent aucun vide autour du point de réunion, il est nécessaire que la somme des angles formés par les côtés qui se réunissent soit égale à quatre angles droits ou 360^d (42).

Il n'y a que trois sortes de polygones réguliers de même espèce, dont les angles puissent remplir exactement l'espace qui est autour d'un point donné; savoir,

Fig. 62. 1°. Six triangles équilatéraux; car chaque angle du triangle équilatéral est de 60^d; donc six angles $= 6 \times 60^d = 360^d$.

Fig. 63. 2°. Quatre angles du quarré; car chaque angle du quarré est droit, ou vaut 90^d; donc quatre angles $= 4 \times 90^d = 360^d$.

Fig. 64. 3°. Trois angles de l'hexagone; car chaque angle de l'hexagone est de 120^d; donc trois angles $= 3 \times 120^d = 360^d$.

La réunion des angles de tout autre polygone régulier donnera plus ou moins de 360^d, comme il est aisé de s'en convaincre.

154. *Problême premier.* Sur une ligne donnée AB, construire un triangle équilatéral.

Fig 70. Du point A comme centre, et d'un rayon AB, décrivez l'arc du cercle ab: du point B comme centre, et du même rayon, décrivez l'arc cd; par le point d'intersection O, menez les lignes OA, OB, et le triangle AOB sera équilatéral; car ses trois côtés seront rayons de cercles égaux.

155. *Problême deuxième.* Faire sous un angle

donné M, et sur une ligne donnée AB un rhombe.

A l'extrémité de la ligne AB, faites l'angle $BAD = M$; par le point D menez la ligne DC égale et parallèle à AB; joignez BC, et la figure sera le rhombe demandé. Fig. 65.

156. *Probléme troisième.* Inscrire un quarré dans un cercle donné.

Menez deux diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre : joignez les quatre extrémités de ces diamètres par des cordes, et vous aurez le quarré $ABCD$, inscrit au cercle; car, 1°. les quatre côtés seront égaux, puisque ce sont des cordes qui soutendent des arcs égaux : 2°. les angles seront aussi égaux; car ils sont tous les quatre inscrits, appuyés sur le diamètre. Fig. 66.

157. *Problème quatrième.* Inscrire un octogone dans un cercle donné.

Inscrivez d'abord un quarré, du centre du cercle abaissez des perpendiculaires sur les côtés du quarré; ces perpendiculaires prolongées, partageront les arcs en deux parties égales, et les cordes des arcs formés par ces divisions seront les côtés de l'octogone. Fig. 68.

158. *Scholie.* En subdivisant le côté de l'octogone en deux parties, on trouveroit le côté d'une figure de 16 côtés.... etc. On peut donc par ce problème trouver les cordes qui soutendent dans un cercle les arcs de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$.... de la circonférence.

159. *Problême cinquième.* Inscrire un hexagone dans le cercle.

Portez successivement le rayon du cercle six fois sur la circonférence (152). Fig. 69.

160. *Scholie.* On inscrira un triangle équilatéral dans un cercle en tirant les cordes qui soutendent

des arcs doubles de l'hexagone : pareillement en divisant le côté et l'arc correspondant de l'hexagone en deux parties égales, par une perpendiculaire abaissée du centre, on aura une figure de 12 côtés; en subdivisant celle-ci par la même méthode, on en aura une de 24.... etc.

Ce problême et les correspondans nous donnent les moyens de diviser un cercle en 2, en 4, en 6, en 8, en 12, en 16, en 24.... parties égales. Nous verrons plus bas le moyen de le diviser en 5, en 10, en 15, en 20.... parties égales; mais on n'a pas encore le moyen de diviser élémentairement le cercle en sept parties égales.

SECTION III.

Des lignes considérées quant aux rapports qu'elles peuvent avoir entr'elles (b).

161. Les lignes peuvent être exprimées par des nombres, comme toutes les grandeurs quelconques. Il suffit pour cela de prendre une ligne pour unité de mesure, et de comparer les autres lignes à celle-là; alors chaque ligne représente un certain nombre d'unités, entier ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable. On peut donc les comparer entr'elles, comme on compare les nombres, et déduire de leur comparaison plusieurs propriétés fondées sur la nature des proportions.

162. *Théorême.* Des lignes parallèles BM, CN, DP..... qui divisent en parties égales AB, Fig. 68. BC, CD, un des côtés AX d'un angle XAY, divisent pareillement l'autre côté AY en parties égales entr'elles.

Par les points de division M, N, P, menez les

lignes Ma, Nb, Pc parallèles à AX, les triangles MaN, NbP, seront égaux entr'eux et au triangle ABM ; car, 1°. $Ma = BC = AB$. 2°. L'angle $aMN = BAM$ et $MaN = ABN$ (103) ; donc $MN = AM$.... Par la même raison $NP = AM$.... $PQ = AM$.

163. *Corollaire.* On a donc la proportion $AB : AM :: BC : MN :: CD : NP :: DF : PQ ::$...

164. *Théorême.* Si une ligne bc parallèle à la base d'un triangle XAY divise le côté AX en deux parties qui aient entr'elles et avec la ligne totale AX un rapport commensurable, elle divisera aussi le côté AY en deux parties qui auront entr'elles et avec la ligne totale AY le même rapport. Fig. 67.

Car supposons que la partie Ab contienne un certain nombre de fois, par exemple, quatre fois la ligne m, que nous prenons pour unité de mesure, et que la partie bX la contienne cinq fois : par les points B, C, D, éloignés entr'eux d'une ligne égale à m, menons des parallèles à la base, et la ligne AY se trouvera divisée en parties égales aux points M, N, P.... etc. Donc on aura la proportionnalité du corollaire précédent ; mais la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un certain nombre d'antécédens est au même nombre de conséquens ; donc $AX : AY :: Ab : Ac$.

Par la même propriété des proportions $Ab : Ac :: bX : cY$; donc.... etc.

165. *Théorême.* Si la ligne AX est divisée au point R en deux parties incommensurables AR, RX, par RS, parallèle à la base du triangle AYX, quel que soit le rapport de $AR : RX$, celui de $AS : SY$ lui sera égal ; en sorte qu'on aura la proportion $AR : RX :: AS : SY$.... Fig. 69.

Portons la ligne AR sur AX autant de fois qu'elle peut y être contenue : nous aurons un reste plus petit que AR : portons ce reste sur AR autant de fois qu'il y est contenu : nous aurons un reste plus petit que le premier : portons continuellement ce reste sur la ligne AR, selon la méthode indiquée (*Problême* 7, n°. 117), nous parviendrons à connoître la commune mesure entre AR et Am, la partie mX étant plus petite que la mesure commune. Tirant donc la ligne mn parallèle à XY, on aura la proportion $AR : AS :: AX - Xm : AY - nY$ (164); mais en continuant à porter les restes successifs sur AR, on peut rendre la commune mesure entre AR et Am plus petite que toute quantité assignable ; donc Xm et nY peuvent être supposés zéro ; donc on aura la proportion $AR : AS :: AX : AY$.

166. *Corollaire.* Si les deux côtés d'un triangle sont coupés par une ou plusieurs parallèles à la base du triangle, quel que soit le rapport commensurable ou incommensurable qui existe entre les divisions faites sur la première ligne, il sera le même entre les divisions correspondantes faites sur la seconde ligne.

167. *Théorême.* Réciproquement, si les côtés AX, AY sont coupés proportionnellement par la ligne RS, de sorte qu'on ait la proportion AR :
Fig. 71. $AS :: AX : AY$, les lignes RS, XY seront parallèles.

Car par le point R, on peut toujours mener une parallèle à XY (71), et si RS n'est pas cette parallèle, supposons que RO le soit, alors on aura cette proportion $AR : AO :: AX : AY$ (*Théorême précédent*) ; mais par la supposition $AR : AS :: AX : AY$; donc AO doit égaler AS,

c'est-à-dire, que RO doit se confondre avec RS, et par conséquent RS est parallèle à XY.

168. *Définition.* Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun.

169. *Théorême.* Deux triangles équiangles ABC, abc, ont les côtés homologues proportionnels.

Si l'on transporte le petit triangle abc sur le grand, de manière que le côté ab soit sur AB, et ac sur AC, le troisième côté bc sera parallèle à BC; car par la supposition l'angle $abc = ABC$ et $acb = ACB$; or, ces angles sont formés par les sécantes AB, AC qui coupent les deux lignes bc, BC; donc ces deux lignes sont parallèles (102); donc les deux lignes AB, AC, sont coupées proportionnellement aux points b, c, c'est-à-dire, que l'on a la proportion $AB : AC :: ab : ac$. Fig. 72.

Si l'on place le petit triangle sur le grand de manière que l'angle c ait ses côtés sur ceux de l'angle C, on démontrera de la même manière, et par le même raisonnement, que ba sera parallèle à BA; donc bc et ca seront proportionnels à BC et CA; donc les côtés du petit triangle seront proportionnels à leurs homologues dans le grand.

170. *Scholie.* De l'égalité de trois angles d'un triangle avec les trois angles d'un autre triangle, on conclut la proportionnalité des côtés, et pour que deux triangles soient semblables, il suffit qu'ils aient deux angles égaux chacun à chacun; car alors le troisième sera égal de part et d'autre, et les deux triangles seront équiangles.

171. *Théorême.* Deux triangles ABC, abc qui ont leurs côtés homologues proportionnels sont équiangles et semblables.

Supposons que l'on ait $BC : bc :: AB : ab ::$ Fig. 72.

$AC : ac$, je dis que les triangles ABC, abc auront les angles égaux.

Faites au point b, l'angle $gbc = B$ (110), et au point c, l'angle $gcb = C$, le troisième angle g sera égal à A, et les deux triangles ABC, bcg seront équiangles ; donc on aura la proportion $BC : bc :: AB : bg :: AC : cg$. (*Théorême préc.*) Mais par la supposition, $BC : bc :: AB : ab :: AC : ac$; donc $ab = bg$, et $ac = cg$; donc les deux triangles abc, bgc sont égaux (134) ; mais par la construction, le triangle bgc est équiangle au triangle ABC ; donc aussi les triangles ABC, abc sont équiangles et semblables.

172. *Théorême.* Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables.

Fig. 72. Soit l'angle $a = A$; et supposons qu'on ait $ab : ac :: AB : AC$, je dis que le triangle abc est semblable au triangle ABC.

Prenons sur la ligne AB, $Ab = ab$, et menons bc parallèle à BC ; l'angle b sera égal à l'angle B, l'angle $c = C$, et le triangle Abc aura ses angles égaux à ceux du triangle ABC, on aura donc la proportion $Ab : Ac :: AB : AC$; mais par la supposition on a...... $ab : ac :: AB : AC$, et par la construction $Ab = ab$; donc $AC = ac$; les deux triangles abc, Abc sont donc égaux (136) : or, le triangle Abc est semblable au triangle ABC ; donc abc lui est aussi semblable.

Fig. 73. 173. *Théorême.* Si les deux côtés ba, bc qui forment l'angle b, sont perpendiculaires chacun à chacun aux deux côtés AB, BC, qui forment l'angle B ; ces deux angles B, b seront égaux.

Car on a dans les deux triangles bdc, Bda, l'angle $bdc =$ à l'angle Bda ; l'angle $dcb = daB$, puisqu'ils sont droits l'un et l'autre ; donc le troi-

sième angle dbc du premier triangle est égal au troisième dBa du second triangle.

Nota. Si le point b étoit pris dans l'espace compris entre les deux lignes, l'angle Abc seroit le supplément de ABC, ou de Cbc, qui seroit par conséquent égal à ABC.

174. *Théorême.* Si on divise un angle quelconque A du triangle ABC en deux parties égales par la droite AD, les côtés AB, AC seront proportionnels aux segmens BD et DC.

Car soit mené BF parallèle à AD, qui ren- Fig. 74. contre en F le côté CA prolongé, les deux lignes CF, CB, étant coupées par des parallèles, donneront la proportion $FA : AC :: BD : DC$; Or, $BFA = ABF$; donc le triangle ABF est isocèle, et l'on a $FA = AB$; substituant dans la proportion énoncée, on aura $AB : AC :: BD : DC$..... C. Q. F. D.

175. *Théorême.* Si du sommet de l'angle droit A, d'un triangle rectangle BAC, on abaisse sur l'hypoténuse BC, la perpendiculaire AD, 1°. les deux côtés AB, AC seront moyens proportionnels entre l'hypoténuse entière et le segment adjacent BD, ou DC; 2°. la perpendicu- Fig. 75. laire AD, sera moyenne proportionnelle entre les deux segmens BD, DC.

Car cette perpendiculaire divise le triangle ABC en deux triangles qui sont semblables aú grand triangle. En effet, le triangle BAD, a un angle aigu B commun avec le triangle BAC: de plus, l'angle BDA est droit, et par conséquent $= BAC$; donc le troisième est égal de part et d'autre..... Le triangle ACD a aussi un angle aigu C, commun avec le triangle BAC; de plus, l'angle ADC est droit, et par conséquent $= BAC$; donc le troisième est égal de part et d'autre; donc

les trois triangles BAD, BDC, BAC sont semblables entr'eux

1°. De la similitude des triangles BAD, BAC, on déduit la proportionnalité des côtés homologues : or, BA est en même temps hypoténuse du triangle BAD, et petit côté du triangle BAC; donc il entre deux fois dans la proportion, et l'on a $BC : BA :: BA : BD$....

Par les mêmes raisons, les deux triangles DAC, BAC donneront la proportion $BC : CA :: CA : CD$.

2°. La similitude des triangles BAD, ADC donne, en comparant les côtés homologues, $BD : AD :: AD : DC$; donc la perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les deux segmens.

176. *Scholie.* Si les lignes AB, AC, BD sont exprimées par des nombres (161), la proportion $BC : BA :: BA : BD$ donne l'équation $BD \times BC = \overline{BA}^2$.

La proportion $BC : CA :: CA : CD$ donne l'équation $BC \times CD = \overline{CA}^2$. Ajoutant ces deux équations, on a $BC(BD+DC) = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2$. D'où $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2$, c'est-à-dire, que le quarré du nombre d'unités linéaires contenues dans BC est égal au quarré du nombre d'unités linéaires contenues dans BA, plus au quarré du nombre d'unités linéaires contenues dans CA, ou en d'autres termes, le quarré de l'hypoténuse est Fig. 92. égal à la somme des quarrés des deux côtés qui forment l'angle droit. En sorte que si $BA = 3$, $CA = 4$, on aura $\overline{BC}^2 = 9 + 16 = 25$ et $BC = 5$.

C'est la fameuse propriété du triangle rectangle qui nous a été transmise par Pythagore, et qu'on

trouve démontrée dans *Euclide*, *Prop.* 47, *liv. premier*.

177. *Scholie.* La proposition précédente, jointe aux nos (*168 et suiv.*), et à celles sur les trois angles d'un triangle, sont les propositions les plus importantes et les plus fécondes de la géométrie; elles suffisent presque pour la démonstration de tous les théorêmes et la résolution des problêmes : la raison en est que toutes les figures peuvent se partager en triangles, et un triangle quelconque en deux triangles rectangles; ainsi les propriétés générales des triangles renferment implicitement celles de toutes les figures.

178. *Théorême.* Si par le sommet d'un triangle ABC, on mène sur la base du triangle les lignes AF, AG, AH qui la divisent en parties égales ou inégales, ces mêmes lignes diviseront DE parallèle à la base, proportionnellement aux parties correspondantes de la base.

Car la ligne DE étant parallèle à BC, les triangles DAI, BAF sont semblables; par la même raison IAK, FAG seront semblables de même que KAL, GAH..... on aura donc les proportions $DI : BF :: AI : AF$, et $IK : FG :: AI : AF$; donc $DI : BF :: IK : FG$, on trouvera aussi $IK : FG :: KL : GH$ et $KL : GH :: LE : HC$, d'où on déduira la proportionnalité.... $DI : BF :: IK : FG :: KL : GH :: LE : HC$. Fig. 76.

ARTICLE II.

Des lignes proportionnelles considérées dans le cercle (c).

179. *Théorême.* Une droite AD, abaissée perpendiculairement d'un point de la circonférence sur le diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segmens du diamètre.

Fig. 77. Car si on mène les deux cordes BA, CA, l'angle BAC sera droit (107); donc le triangle BAC sera rectangle, et AD sera la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse; donc on aura la proportion $BD : AD :: AD : DC$. (176).

180. *Scholie.* Les deux cordes AB, AC seront chacune moyenne proportionnelle entre le diamètre entier et le segment adjacent (176).

Fig. 78. 181. *Théorême.* Si deux cordes AB, CD se coupent dans un cercle, leurs parties seront réciproquement proportionnelles, c'est-à-dire, qu'on aura la proportion $AF : FC :: DF : FB$.

Car si on mène les cordes DB, AC, les triangles DFB, AFC seront semblables. En effet, l'angle $DFB = AFC$ (40), l'angle $DBA = ACD$ (106); donc le troisième est égal de part et d'autre; donc on aura la proportion $AF : CF :: DF : BF$..... C. Q. F. D.

182. *Théorême.* Deux sécantes FC, FA, menées à la circonférence concave d'un même point F pris hors du cercle, sont réciproquement propor-
Fig. 79. tionnelles à leurs parties extérieures, c'est-à-dire, que l'on a la proportion $FA : FC :: FB : FD$.

Car

Car les deux triangles FCD, FAB ont l'angle commun, l'angle $FAB = FCD$ (106); donc ils sont semblables : comparant donc leurs côtés homologues, on aura la proportion $FA : FC :: FB : FD$...... C. Q. F. D.

183. *Théorême.* La tangente d'un cercle AC est moyenne proportionnelle entre la sécante AB et la partie extérieure AI, c'est-à-dire, qu'on a la proportion $AB : AC :: AC : AI$.

Car en menant la corde CI, on aura deux triangles ABC, ACI, qui ont, 1°. l'angle A commun; 2°. $ABC = ACI$ (105); donc les côtés homologues donneront la proportion $AB : AC :: AC : AI$..... C. Q. F. D. Fig. 80.

184. *Scholie.* On peut démontrer la même propriété des tangentes par les principes des limites (26). En effet, supposons que la sécante FA tourne sur le point F, de manière que les deux points d'intersection A, D se rapprochant continuellement, finissent par se confondre au point M; la sécante FA deviendra la tangente FM: celle-ci est donc la limite des sécantes : d'un autre côté, la sécante FA en se rapprochant de FM, conserve toujours le même rapport avec FC; donc le rapport est celui de leurs limites (VIII); mais à la limite, la tangente est en même temps sécante, entière, et partie extérieure; donc la proportion (182) deviendra $FC : FM :: FM : FB$..... C. Q. F. D. Fig. 79.

185. *Théorême.* Si quatre cordes forment un quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des deux diagonales AC, BD est égal à la somme des produits de chaque côté par le côté opposé, c'est-à-dire, que l'on a $AC \times BD = BC \times AD + AB \times CD$.

Fig. 83. Prenez l'arc $BM = AD$, et tirez la ligne CM qui rencontre la diagonale BD en I.

Les triangles ABC, DIC sont semblables; car l'angle $BAC = IDC$, puisqu'ils sont tous les deux inscrits, appuyés sur le même arc, l'angle $ACB = DCI$, puisque l'arc $BM = AD$; donc on aura la proportion $AB : AC :: DI : DC$, et $AB \times DC = AC \times DI$.

Les deux triangles ACD, BCI sont semblables; car l'angle $DAC = IBC$ et $ACD = BCI$, pour les mêmes raisons que ci-dessus; donc on aura la proportion $AD : AC :: BI : BC$ et $AD \times BC = AC \times BI$.

Ajoutant ces deux équations, on aura $AB \times DC + AD \times BC = AC \times (DI + IB) = AC \times DB$.

186. *Théorême*. Les deux diagonales d'un quadrilatère inscrit sont entr'elles comme les sommes des produits des côtés qui aboutissent à leurs extrémités, c'est-à-dire, que l'on a la proportion $BD :$
Fig. 83. $AC :: BC \times AB + DC \times AD : BC \times CD + AB \times AD$.

Car à cause de la similitude des triangles BCI, ACD, on aura la proportion $BC : CI :: AC : DC$.... et $BC \times DC = CI \times AC$.

La similitude des triangles MBI, BAC, donnera encore la proportion $AB : AC :: MI : BM$, ou $AB \times AD = AC \times IM$.

Ajoutant les deux équations, on a $BC \times DC + AB \times AD = AC \times (CI + IM) = AC \times CM$. Mais si de l'angle B, on tire la ligne BN, de manière que l'arc CN soit égal à l'arc AD, ce que nous avons dit de la ligne CM, sera également vrai pour la ligne BN, on aura donc l'équation $DC \times AD + AB \times BC = BD \times BN$; mais l'arc $MB + BC = BC + CN$; donc la

corde $CM = BN$; donc les deux équations fournissent la proportion $BD : AC :: AB \times BC + DC \times AD : BC \times DC + AB \times AD$........ C. Q. F. D.

187. (d) *Probléme premier.* Partager la ligne donnée AB en deux parties inégales, qui soient entr'elles dans tel rapport qu'on voudra, par exemple de $5:3$.

Prenez deux lignes AX, AY, d'une longueur arbitraire, faisant entr'elles un angle quelconque; prenez sur une de ces lignes AX, huit parties égales, portez la ligne AB sur AY, et marquez le point B, par l'extrémité D de la huitième division; tirez DB, par la cinquième division, tirez EG parallèle à DB, et la ligne AB sera partagée au point G, dans le rapport de $5:3$; car les deux lignes BD, EG étant parallèles, on aura $AE : EB :: AG : GD$. Fig. 81.

188. *Probléme deuxième.* Diviser une ligne droite en tant de parties données qu'on voudra, égales ou proportionnelles à des lignes données.

Soit proposé de diviser la ligne AB en trois parties proportionnelles aux trois lignes A, B, C. Fig. 82.

Par l'extrémité A, de la ligne AB, tirez la ligne indéfinie AE; prenez $AC = A$, $CD = B$, $DE = C$. Par le point E, menez la ligne EB, et par les points D, C, les lignes DH, CI, parallèles à EB; la ligne AB sera divisée aux points I, H, en trois parties proportionnelles aux lignes données A, B, C : car à cause des parallèles, on aura la proportion $AC : AI :: CD : IH :: DE : BH$.

189. *Problémetroisième.* Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données A, B, C. Fig. 81.

Ayant mené deux lignes AB, AD, faisant un angle quelconque, prenez sur AB la partie

$AE = A$, et la partie $BE = C$; prenez sur la ligne AD la partie $AG = B$, et ayant mené EG par le point B, tirez la parallèle BD. La partie DG sera la quatrième proportionnelle demandée : car alors, à cause des triangles semblables AEG, ABD, on aura la proportion $AE : AG :: EB : GD$.

190. *Problême quatrième.* Trouver une moyenne proportionnelle à deux lignes données A, B.

Soient les deux lignes BD, DC respectivement égales aux deux lignes données A et B; sur la somme de ces deux lignes prise comme diamètre, décrivez une circonférence par le point
Fig. 77. D, élevez la perpendiculaire DA, elle sera la moyenne proportionnelle demandée.

Car il est démontré (179) qu'une ligne abaissée perpendiculairement d'un point de la circonférence sur le diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segmens du diamètre.

191. *Problême cinquième.* Diviser la ligne donnée AB en deux parties, telles que la plus grande soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie.

Fig. 84. Par l'extrémité B de la ligne AB, élevez la perpendiculaire $BC = \frac{AB}{2}$; du point C, comme centre, et d'un rayon BC décrivez la circonférence DBE. Par les points A et C, tirez la ligne ACE; prenez sur AB, la partie $AF = AG$: la ligne AB se trouvera divisée au point F, selon les conditions du problême; c'est-à-dire que l'on aura $AB : AF :: AF : FB$.

Car par la propriété démontrée (183), on a $AE : AB :: AB : AG$; donc *substrahendo* $AE - AB : AB :: AB - AG : AG$, ou AG:

$AB :: BF : AG$, et mettant les moyens à la place des extrêmes, et AF à la place de AG, on a $AB : AF :: AF : FB$.... donc, &c. La ligne AB, ainsi partagée, est dite divisée en moyenne et extrême raison.

192. *Scholie.* On se sert de cette propriété pour inscrire un décagone dans un cercle, ou pour partager une circonférence de cercle en dix parties égales.

En effet, l'angle ACB, au centre du décagone est de 36^d; donc l'angle ABC sera de 72^d. Divisons cet angle en deux parties égales par la ligne EB, l'angle ABE sera de 36^d, et parce que EAB est 72^d, l'angle E sera aussi de 72^d; donc le triangle ABE est isocèle et semblable au triangle ACB; donc on a la proportion $AC : AB :: AB : AE$; mais $AB = EB = CE$: car le triangle BEC est aussi isocèle; donc à la place de AB on peut substituer CE, et l'on aura $AC : EC :: EC : AE$.... donc le côté du décagone est égal à la plus grande partie du rayon divisé en moyenne et extrême raison. Fig. 85.

Après avoir inscrit un décagone, il sera aisé d'inscrire un pentagone en prenant la corde qui soutend l'arc double du décagone.

Veut-on inscrire un pentédécagone ou polygone de 15 côtés, on inscrira un hexagone et un décagone dans le même cercle, et à partir du point de la différence des deux arcs, $AD - AB$ sera celui du pentédécagone : car $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, tirant la corde BD, on aura le côté cherché.

ARTICLE III.

De la similitude des figures.

193. Deux figures sont semblables, lorsqu'elles ont les angles correspondans égaux, et les côtés homologues proportionnels; ou, plus exactement, deux figures sont semblables, lorsqu'on peut former dans l'une et dans l'autre un égal nombre de triangles semblables, chacun à chacun, et semblablement disposés.

Fig. 86. Si d'un point fixe quelconque C, on mène aux angles ou pointes d'un polygone des droites CB, CD, et si l'on prolonge ces lignes proportionnellement à leurs longueurs Cb, Cd, en joignant leurs extrémités on formera un second polygone semblable au premier.

Fig. 87. Deux points M, m, placés sur une droite menée par le point fixe A du même côté, et à des distances de ce point proportionnelles aux côtés du polygone, sont semblablement placés par rapport à ces polygones.

Si l'on prend, sur une seconde ligne menée du point fixe, deux autres points N, n, semblablement placés par rapport aux côtés du polygone, et qu'on mène les lignes MN, mn, elles seront semblablement placées homologues entr'elles, et proportionnelles aux côtés des polygones.

194. *Théorême.* Tous les polygones réguliers d'un égal nombre de côtés, sont des polygones semblables.

Car, 1°. si les polygones sont composés d'un égal nombre de côtés, en tirant du centre, des lignes à toutes les pointes du polygone, on formera autant de triangles qu'il y a de côtés. 2°. Ces triangles

seront équiangles, et par conséquent leurs côtés homologues proportionnels (169); donc, &c.

195. *Théorème.* Tous les cercles sont des figures semblables.

Soient décrits plusieurs cercles de rayons différens; dans chacun de ces cercles soit inscrit un polygone régulier d'un égal nombre de côtés; tous ces polygones seront semblables. Si on double ou si on triple le nombre des côtés de tous ces polygones, on aura de nouveaux polygones qui resteront semblables, et conserveront le même rapport, puisque la similitude reste toujours, et que le rapport des polygones est toujours le même, quel que soit le nombre des côtés des polygones, elle aura lieu dans leurs limites (VIII). Or les cercles sont les limites des polygones inscrits et circonscrits (119); donc les circonférences des cercles sont des figures semblables.

196. *Théorème.* Les contours ou périmètres des figures semblables, sont entr'eux comme les côtés homologues, ou lignes semblablement tirées dans les deux figures.

Car en tirant des diagonales des points A, a, à tous les angles opposés, on divise les deux figures en un égal nombre de triangles semblables (193); donc on a la proportion $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: EA : ea$; donc la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est à un seul conséquent; ou le périmètre de la première figure est au périmètre de la seconde, comme un côté de la première est à son homologue de la seconde. Fig. 88.

197. *Corollaire.* Les polygones réguliers d'un égal nombre de côtés, sont entr'eux comme leurs rayons droits ou comme leurs rayons obliques, et

les circonférences de cercles sont entr'elles comme leurs rayons ou leurs diamètres.

198. *Théorême.* Si on a plusieurs lignes courbes *AMB*, ou composées de lignes droites, ayant leur concavité tournée du même côté, et étant terminée aux mêmes points, la plus courte de toutes est celle qui est enveloppée par les autres. Fig. 89.

Car si *AMB* n'étoit pas la plus courte, il y en auroit une parmi les enveloppantes plus courte que toutes les autres, laquelle seroit plus petite, ou tout au plus égale à *AMB*. Soit *ACNDB*, la plus courte; entre celle-ci et *AMB*, on peut mener une ligne droite *CD*, qui ne coupe pas la dernière. La droite *CD* est plus courte que *CND*; donc *ACDB* est plus courte que *ACNDB* : celle-ci ne seroit donc pas la plus courte de toutes, et l'hypothèse que nous avons faite ne sauroit subsister; donc toutes les lignes enveloppantes sont plus longues que *AMB*.

Fig. 90. 199. *Corollaire premier.* Un arc de cercle est plus grand que la corde qui le soutend, et il est plus petit que la somme de deux tangentes *am*, *dm*, menées aux deux extrémités de l'arc, et comprises entre ces extrémités et leur point d'intersection.

200. *Corollaire deuxième.* La circonférence de cercle est plus grande que tout polygone qu'on peut lui inscrire, et plus petite que tout polygone circonscrit.

201. *Corollaire troisième.* Plus le polygone circonscrit à un cercle a de côtés, plus son périmètre approche de la circonférence, et par conséquent plus il est petit.

202. *Problême.* Sur le côté *ab*, homologue à *AB*, décrire un polygone semblable à *ABCDE*.

Dans le polygone donné, tirez les diagonales

AC, AD au point a, faites l'angle $bac = BAC$, Fig. 88.
et au point b l'angle $abc = ABC$, les lignes ab, bc se couperont au point c, et abc sera un triangle semblable à ABC, de même sur ac, homologue de AC, décrivez le triangle acd semblable au triangle ACD, et sur ad le triangle acd semblable au triangle AED; le polygone $abcde$ sera semblable au polygone $ABCDE$.

Car ces deux polygones sont composés d'un égal nombre de triangles semblables.

203. *Scholie.* La théorie des lignes proportionnelles est une des plus usuelles et des plus utiles de la géométrie, elle est sur-tout d'un usage indispensable dans l'arpentage et la levée des plans. Veut-on représenter exactement sur une feuille de papier les contours d'une grande figure tracée sur un vaste terrein, et la position des objets qu'elle renferme ? On sent que la question est réduite à faire en petit une figure semblable à celle qu'il s'agit de dessiner. des deux extrémités d'une base prise à volonté sur le terrein : on observe les angles que les rayons visuels des objets forment avec elle. On prend ensuite sur le papier une ligne pour représenter la base, et l'on mène par ses extrémités des lignes qui font avec cette base des angles égaux aux angles observés; les points de concours de ces droites déterminent sur le papier la position respective de ces objets; le rapport de leur distance mutuelle à la base est le même dans les deux figures. C'est ainsi qu'on s'y prend pour avoir le plan du cours d'une rivière, d'une campagne, d'un enclos, d'un terrein de telle figure que ce soit.

LIVRE II.

DE LA GÉOMÉTRIE DES SURFACES.

204. On entend par surface, tout ce qui est étendu dans le sens de la longueur et de la largeur.

La surface est rectiligne, curviligne ou mixtiligne.

La surface rectiligne est celle qui est comprise entre deux lignes droites.

Une surface curviligne est comprise entre une ou plusieurs courbes.

La surface mixtiligne seroit celle qui seroit terminée par des lignes droites et des lignes courbes.

205. Les surfaces sont planes, ou non planes; les surfaces planes sont celles sur lesquelles une ligne droite peut s'appliquer dans tous les sens.

Les surfaces non planes sont celles sur lesquelles une ligne droite ne peut pas s'appliquer dans tous les sens : telle est la surface latérale d'une solive, d'une colonne, d'un globe ou ballon.

Nota. Il est possible qu'une ligne droite s'applique exactement dans un certain sens sur une surface non plane; mais elle ne s'y appliquera pas dans tous les sens. Il ne peut être question dans cet article que des surfaces planes, c'est pourquoi nous n'insisterons pas davantage sur la définition et division des surfaces non planes.

L'aire d'une surface est l'étendue ou le contenu de cette surface ; et l'évaluation de l'aire se nomme *quadrature.*

La quadrature des surfaces suppose leur comparaison. Ainsi toute la géométrie des surfaces se réduit à leur quadrature, ou à leur mesure.

ARTICLE PREMIER.

De la comparaison des surfaces.

206. *Théorême.* Un rhombe et un rectangle de même base et de même hauteur, sont égaux en surface.

La hauteur du rhombe, sa mesure par la perpendiculaire abaissée d'un côté sur celui qui lui est opposé, et qu'on nomme la base, soit le rectangle $FBED$, et le rhombe $AGED$, ayant même hauteur DF, et une base égale ; car AG, qui sert de base au rhombe, est égal à DE, et par conséquent à FB. Fig. 91.

Or, il est visible qu'ils sont égaux en surface ; car à cause de l'égalité des triangles ADF, GEB, on a $ADF + DFGE = GEB + DFGE$, ou $AGED = FBED$.

207. *Théorême.* Le triangle ABC est la moitié du rhombe de même base et de même hauteur.

Car si par le point A on mène la ligne AD égale et parallèle à CB, qu'on joigne ensuite les points C et D, on formera le rhombe $ABCD$: or, le triangle $ABC =$ en surface le triangle ADC; car, ces deux triangles ont leurs trois Fig. 93.

côtés respectivement égaux ; donc ils sont égaux ; donc *ABC* est la moitié du rhombe de même base et de même hauteur.

208. *Corollaire*. Le triangle est la moitié du rectangle de même base et de même hauteur.

209. *Théorême*. Deux rectangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

Soient les deux rectangles *ABCD*, *DCGF*. Puisqu'ils ont même hauteur, leurs bases supérieures et inférieures peuvent être prises sur les deux mêmes lignes parallèles *AF*, *BG*.

Fig. 94. Supposons, 1°. que les deux bases soient commensurables entr'elles, qu'elles soient, par exemple, dans le rapport de 4 : 3, ou de *M* à *N*. Partageons la base *BC* en quatre parties égales, et par chaque point de division élevant des perpendiculaires, le rectangle *ADCB* sera divisé en quatre petits rectangles égaux, puisqu'ils auront la même base et la même hauteur.

Partageons aussi la base *CG* en trois parties égales entr'elles et aux premières. En élevant des perpendiculaires, le second rectangle sera divisé en trois petits rectangles égaux entr'eux et aux premiers ; donc la surface du rectangle *ADCB* est à celle de *BCGF*, comme le nombre des rectangles qui composent le premier est au nombre des rectangles qui composent le second, c'est-à-dire, comme *BC* base du premier est à *CG* base du second.

2°. Si les bases *dc*, *cg* étoient incommensurables entr'elles, soit portée sur la base du premier rectangle celle du second *cg* autant de fois qu'elle y sera contenue, soit porté le reste de cette première division sur la seconde base ; le second reste, le troisième reste, et, etc. sur cette même base,

suivant la méthode du (117); par ce procédé, on trouvera la partie $adsr$ du premier rectangle commensurable avec le second, la partie sc de la base étant toujours plus petite que la dernière unité de mesure qu'on a employée; mais cette unité de mesure peut être rendue aussi petite qu'on voudra; donc le reste sc peut être plus petit que toute quantité assignable, ou = zéro; donc on peut dire que la surface d'un rectangle $adcb$ est à celle de $bcgf :: dc : cg$; donc quel que soit le rapport des bases commensurable ou incommensurable, deux rectangles de même hauteur seront entr'eux comme leurs bases.

210. *Corollaire.* Deux rectangles de même base sont entr'eux comme leurs hauteurs; car si AF est perpendiculaire sur AB, AB est aussi perpendiculaire sur AF; donc en renversant la figure, on peut prendre AB pour base.

211. *Théoréme.* Deux rectangles quelconques $ABCD$, $abcd$, sont entr'eux comme les produits des bases multipliées par les hauteurs: car on peut toujours faire un rectangle de même hauteur que le premier, et de même base que le second.

Soit $AdfD$ ce troisième rectangle, on aura les deux proportions. Fig. 95.

$$ABCD : AdfD :: AB : ad,$$
$$AdfD : abcd :: AD : ab.$$

En multipliant les deux proportions par ordre, et observant que le terme $AdfD$ peut être omis, parce qu'il multiplie les deux termes du premier rapport, on aura $ABCD : abcd :: AB \times AD : ab \times ad$: C. Q. F. D.

212. *Scholie.* Pour avoir une idée exacte de ce qu'il faut entendre par le produit de deux lignes, il

faut concevoir une droite quelconque prise pour unité, et considérer les lignes qu'on multiplie comme des nombres abstraits qui expriment le rapport des longueurs de ces lignes à l'unite linéaire; ainsi la surface du rectangle $ABCD$ contiendra celle de $abcd$ autant de fois qu'il y a d'unités abstraites dans le rapport $\frac{AB \times AD}{ab \times cd.}$.

Dans l'évaluation des surfaces, on compare ordinairement celle qu'on mesure à celle d'un quarré, parce que c'est celle dont la notion est la plus facile à saisir, puisque les deux dimensions y sont égales; et pour plus de facilité et de simplicité, on choisit pour unité de surface, le quarré dont la longueur et la largeur sont égales à l'unité linéaire; ainsi dans l'exemple ci-dessus, si on prend pour terme de comparaison le quarré $admn$, et qu'on fasse ad ou $mn = I$, on aura $ABCD = \overline{ad}^2 \times \frac{AB \times AD}{I^2}$ c'est-à-dire que la surface d'un rectangle est égale à celle du quarré pris pour unité de mesure, répétée autant de fois qu'il y a d'unités abstraites dans le produit de la base multipliée par la hauteur. On se contente ordinairement de dire que la surface d'un rectangle est égale au produit de la base, multipliée par la hauteur; mais cette expression, commode pour sa briéveté, seroit insignifiante, si l'on n'y attachoit le sens que nous venons d'expliquer.

213. *Scholie deuxième.* Si le rectangle $abcd$ est égal en surface au rectangle $ABCD$; en les comparant l'un et l'autre à $AdfD$, on aura la proportion:

Fig. 95.
$$ABCD : AdfD :: AB : ad;$$
$$abcd : AdfD :: ab : AD.$$

Et parce que les deux premiers rapports sont

égaux, on aura la proportion $AB : ad :: cd : AD$; mais si les deux rectangles sont égaux en surface $AB \times AD = ad \times cd$; donc lorsque quatre lignes sont en proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Voilà la propriété fondamentale des proportions démontrée par les principes de la géométrie, indépendamment de l'arithmétique et l'algèbre, et par-là la théorie des lignes proportionnelles se trouve essentiellement liée avec celle des surfaces.

215. *Scholie troisième.* La théorie des lignes proportionnelles nous a donné (176);

1°. $BD \times BC = \overline{AB}^2$.... 2°. $DC \times BC = \overline{AC}^2$: en rapprochant cette théorie de celle des surfaces, il est visible, 1°. que $BD \times BC$ est l'expression de la surface rectangle $BDLP$, et $\overline{AB}^2$ est l'expression de la surface du quarré N; 2°. que $DC \times BC$ est l'expression de la surface du rectangle $DCQL$, et $\overline{AC}^2$ est l'expression de la surface du quarré M; donc $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ exprime que la surface du quarré L est égale à celle du quarré M, plus celle du quarré N, ce qui est la propriété du quarré de l'hypoténuse déjà démontrée (176). Fig. 92.

216. *Corollaire.* Si $AB = AC$, la propriété déjà démontrée deviendra $\overline{BC}^2 = 2\overline{AC}^2$; donc $\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, ce qui donne la proportion $AC : BC :: 1 : \sqrt{2}$. C'est-à-dire que le rapport du côté AC d'un quarré à la diagonale $BC =$ le rapport de 1 à $\sqrt{2}$. Fig. 92.

217. *Théorème.* La surface d'un rhombe ou losange quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Fig. 91. Car le rhombe $ADEG$ est égal en surface au rectangle $DFBE$ de même base et de même hauteur; or, celui-ci a pour mesure $DF \times FB$; donc.... etc.

218. *Corollaire.* La surface d'un triangle ABC est égale à la moitié du produit de sa base par la hauteur AM : car le triangle est la moitié du Fig. 93. rhombe de même base et de même hauteur.

Nota. La hauteur du triangle se mesure par une perpendiculaire abaissée du sommet d'un angle A sur le côté opposé BC, prolongé si cela est nécessaire, et pour lors ce même côté servira de base.

219. *Théorême.* La surface d'un trapèze est égale à sa hauteur, multipliée par la demi-somme de ses bases parallèles.

Fig. 97. Soit le trapèze $ABCD$ qu'on peut toujours diviser en deux triangles par la diagonale AC. Ces deux triangles ont même hauteur puisqu'ils sont compris entre deux parallèles; donc la surface DCA $= \frac{DC \times CF}{2}$.... celle de $ABC = \frac{AB \times CF}{2}$; donc les deux réunies, ou la surface du trapèze, $= \frac{AB + DC}{2} \times CF$.... Donc, etc.

220. *Scholie.* Si par le milieu de AD on mène HI parallèle à la base AB, le point I sera sur le milieu de CB (163), et $HI = AL = \frac{AB + DC}{2}$. La surface du trapèze peut donc se mesurer, en prenant le produit de sa hauteur par la ligne qui joint le milieu des deux côtés qui ne sont pas parallèles.

221. *Théorême.* La surface d'un polygone régulier est égale au produit de la moitié de son contour,

tour, ou périmètre par la perpendiculaire abaissée du centre sur un de ses côtés.

Soit un polygone quelconque inscrit dans un cercle. Si du centre du polygone on tire des rayons à toutes les pointes des polygones, ces rayons diviseront le polygone en autant de triangles égaux qu'il y aura de côtés. Or, la surface de chaque triangle est égale au produit de sa hauteur par la moitié de sa base; donc la surface de tous les triangles sera égale à la hauteur commune par la moitié de la somme des bases; c'est-à-dire par la moitié du périmètre du polygone. Fig. 96.

222. *Lemme premier.* Quand on inscrit plusieurs polygones dans un même cercle, le rayon OS est la limite des perpendiculaires OR abaissées du centre sur les côtés CB des polygones inscrits. Fig. 96.

Car la différence RS est d'autant moindre que la corde CB approche plus de l'arc CSB : or, plus le polygone inscrit a de côtés, plus la corde approche de l'arc, sans jamais se confondre avec lui; mais il peut n'en différer que d'une quantité moindre que toute grandeur assignable. Car 1°. quelque petit que soit le côté CB, on peut supposer un polygone inscrit d'un nombre de côtés double, et l'on aura toujours $CS + SB > CB$; donc quelque petite que soit la corde CB, elle ne se confond pas avec l'arc correspondant. 2°. Elle peut n'en différer que d'une grandeur moindre que toute quantité donnée; car soit M la différence de l'arc CSB à CB, à cause de $CS + SB > CB$, on aura la différence de CSB à $CS + SB < M$; donc à plus forte raison la différence de la moitié de l'arc $= CSB$ à la corde CS, sera $< M$. Or, M peut être aussi petit qu'on veut, donc la différence entre l'arc et la corde peut devenir inassignable, et par conséquent la différence RS peut devenir moindre que

toute grandeur donnée; donc la perpendiculaire OR aura pour limite OS.

Fig. 96. 223. *Lemme deuxième.* Si l'on a une suite de polygones inscrits dans le même cercle, représentés par $P, P', P'' \ldots . P^{(n)}$, et qu'on circonscrive au même cercle une suite de polygones semblables $Q, Q', Q'' \ldots . Q^{(n)}$, la différence des périmètres
Fig. 96. de deux polygones correspondans P'', Q'', pris un dans chaque suite, sera d'autant plus petite que les polygones qu'on considère auront plus de côtés.

Soit $ABCDEF$, le polygone inscrit représenté par P'', $GHIKLM$, le polygone correspondant circonscrit représenté par Q'', IH, CB, seront les deux côtés correspondans; OS sera le rayon droit, ou la perpendiculaire du polygone circonscrit, OR celui du polygone inscrit.

Les deux triangles semblables OIH, OCB, donnent la proportion $IH : CB :: OS : OR$, et parce que les deux polygones sont semblables, on a $IH : CB :: Q'' : P'' \ldots$ donc $Q'' : P'' :: OS : OR$; on a encore $Q'' - P'' : Q'' :: RS : OS \ldots$ donc

$$Q'' - P'' = \frac{Q''}{OS} RS.$$

Si on compare deux polygones d'un plus grand nombre de côtés $Q^{(n)}, P^{(n)}$, on aura $Q^{(n)} - P^{(n)} = \frac{Q^{(n)}}{OS} R^{(n)}S$; or, il est visible que cette seconde expression est moindre que la première, car l'on a $R^{(n)}S < RS$ (*Lemme premier*), et $Q^{(n)} < Q''$ (201); donc, etc.

224. *Scholie.* Rien ne limite le nombre des côtés des polygones qu'on peut inscrire et circonscrire à un même cercle; on peut le concevoir si grand qu'il surpasse tout nombre assignable. Donc la différence entre deux polygones circonscrits et

inscrits, peut devenir moindre que toute quantité donnée. C'est-à-dire, qu'ils peuvent ne différer entr'eux, et par conséquent du cercle auquel ils sont inscrits et circonscrits, que d'une quantité moindre que toute grandeur assignable : donc le dernier des rapports qui existe entre les polygones inscrits et circonscrits au même cercle, est un rapport d'égalité, ou, ce qui est la même chose, le cercle est la limite des polygones qu'on peut lui inscrire et circonscrire.

225. *Lemme troisième.* Si l'on considère deux polygones, l'un inscrit P'', et l'autre circonscrit Q'', d'un égal nombre de côtés, la différence de leur surface sera d'autant plus petite que les polygones auront plus de côtés. Fig. 96.

Car la différence des surfaces est égale à la somme des petits trapèzes $ABHG$, dont l'expression est $(Q''+P'')\frac{SR}{2}$ (219). Mais de la proportion $Q'':P''::SO:RO$, on déduit $Q''+P''=\left(\frac{SO+RO}{SO}\right)Q''=\left(\frac{2SO-RS}{SO}\right)Q''$. Donc la différence des surfaces sera exprimée par $Q''\left(\frac{2SO-RS}{SO}\right)\frac{RS}{2}$; plus les polygones inscrits ont de côtés, plus SR devient petit ; donc la différence des surfaces deviendra d'autant plus petite que les polygones inscrits et circonscrits qu'on compare ont plus de côtés.

226. *Scholie.* A la limite des polygones $SR=0$ (*Lemme premier*) ; donc à la limite, la différence des surfaces entre le polygone inscrit et circonscrit est zéro ; mais le cercle est cette limite (*Lemme deuxième*) ; donc le dernier des rapports entre les

surfaces des polygones inscrits, circonscrits et du cercle, est un rapport d'égalité.

227. (*e*). *Théorème.* La surface du cercle est égale au produit de son rayon par la moitié de sa circonférence.

Supposons deux polygones, un inscrit P'' et l'au-
Fig. 96. tre circonscrit Q'', au même cercle; la surface de ces deux polygones est égale au produit de leur rayon droit par la moitié de leur périmètre.

La limite des rayons droits des polygones inscrits est le rayon du cercle OS (*Lemme premier*); la limite des périmètres est la circonférence (*Lemme deuxième*); donc la limite de l'expression de la surface de ces polygones est le produit du rayon du cercle par la demi-circonférence: mais la surface du cercle est la limite de celles des polygones (*Lemme troisième*); donc l'expression de la surface du cercle sera le produit de son rayon par la demi-circonférence (3.... 9).

228. *Lemme quatrième.* Si l'on prend le quart de la circonférence, ou un arc d'une courbe quelconque AP, et qu'on divise la surface en plusieurs rectangles ayant des bases égales tels que
Fig. 99. $bpcm$, $pquo$, $qrst$.... etc. Qu'on fasse ensuite les rectangles extérieurs $AbBc$, $Cbpn$, $Mpqr$...., on aura 1°. la différence entre la somme des rectangles extérieurs et des intérieurs égale au rectangle $PQRS$; car cette différence est égale à la somme des petits rectangles $BAbc + Ccmn + Mnor +$....

2°. Plus le nombre des rectangles augmentera, plus la largeur de leurs bases diminuera; en sorte qu'elle pourra devenir plus petite que toute grandeur assignable, et pour lors la surface du rectangle $PQRS$ sera zéro; donc à la limite la somme

des rectangles extérieurs, celle des rectangles intérieurs et la surface curviligne seront égales; c'est-à-dire, que le dernier rapport entre ces trois surfaces est un rapport d'égalité.

3°. Enfin l'espace curviligne $pqnr$ est évidemment plus grand que le rectangle intérieur correspondant $pqno$, et plus petit que l'extérieur $pqMr$.

229. *Scholie.* Les principes expliqués dans les théorêmes précédens, suffisent pour mesurer toutes les figures régulières; mais lorsqu'on veut passer de la théorie à la pratique, presque toutes les figures qu'on a à mesurer se présentent sous des formes irrégulières; il faut alors chercher à les ramener à des figures connues en les divisant par des lignes tirées convenablement. Les plus simples et celles qui réussiront toujours sont les triangles; ainsi en tirant du point F les lignes FC, FB, on aura trois triangles, que l'on estimera séparément, et la somme des trois donnera la surface totale. Fig. 91.

230. *Problême premier.* Construire un rectangle qui soit égal en surface à un triangle donné.

Soit le triangle ABC, prenez $AL = \frac{AB}{2}$; élevez la perpendiculaire ML égale à la hauteur du triangle : achevez le rectangle $MNAL$, il sera égal en surface au triangle donné; car la surface du triangle, comme celle du rectangle, est égale à $AL \times ML$. Fig. 100.

231. *Problême deuxième.* Construire un quarré qui soit égal en surface à un rectangle donné.

Soit le rectangle donné $ABCD$, prenez une moyenne proportionnelle à la base AB, et à la hauteur AD (190), sur cette moyenne proportionnelle, construisez le quarré $APNM$, il sera égal en surface au rectangle donné. Fig. 101.

Car la moyenne proportionnelle donnera AB : $AM :: AM : AD$; donc $AB \times AD = \overline{AM}^2$. Le premier membre de cette équation donne la surface du rectangle, le second donne celle du quarré....; donc....

On pourroit aussi construire un quarré égal en surface à un rhombe donné.

232. *Problême troisième.* Changer un polygone donné en un autre polygone, qui ait un côté de moins et qui lui soit égal en surface.

Fig. 102. Soit $ABCDE$ le polygone donné; tirez la diagonale AC qui retranche le triangle ABC: par le point B, menez BN parallèle à AC, prolongez DC jusqu'en N, et joignez AN. Le polygone $ANDE$ sera égal en surface au polygone donné; car le triangle ACN, que l'on ajoute, a même base AC, et même hauteur que le triangle rectangle retranché ABC, puisqu'ils sont entre deux parallèles; donc ils sont égaux en surface.

Ce nouveau polygone pourra se réduire en un autre qui ait un côté de moins, et ainsi de suite; donc tout polygone pourra se changer en un triangle qui lui sera égal en surface. Par exemple, si on retranche le triangle AED, et qu'on ajoute le triangle AMD, on aura le triangle MAN, égal en surface au pentagone $ABCDE$.

Fig. 104. 233. *Problême quatrième.* Construire un rectangle qui soit égal en surface à un cercle donné.

Soit le cercle dont le rayon est CA, prenez une ligne AB égale à la circonférence, joignez CB, et le triangle CAB sera égal en surface au cercle donné; car l'un et l'autre a pour mesure $CA \times \frac{AB}{2}$.

On réduira ensuite la surface du triangle en celle d'un rectangle $AMNC$, et celle-ci en celle du

quarré $ARPQ$, égal en surface au cercle, et c'est en cela que consiste la quadrature du cercle.

234. *Scholie premier.* Le problême de la quadrature du cercle n'auroit aucune difficulté, si l'on pouvoit trouver géométriquement une ligne droite AB, égale à la circonférence; ou ce qui revient au même, si l'on pouvoit trouver le rapport du rayon, ou du diamètre à la circonférence : car le rapport une fois connu, la circonférence le seroit aussi, puisqu'elle seroit égale au diamètre multiplié par ce rapport. Ce rapport ne peut être déterminé que d'une manière approchée; car il est démontré qu'il est incommensurable, c'est-à-dire, qu'il ne peut être exprimé en nombres entiers. Archimède, en inscrivant et circonscrivant à un cercle un polygone de 96 côtés, a trouvé que le rapport de la circonférence au diamètre étoit $< 3.\frac{10}{70}$ et $> 3.\frac{10}{71}$ (1) ; ainsi $\frac{22}{7}$ est une valeur fort approchée qui suffit pour les besoins des arts. Quand on veut une approximation plus considérable, on prend celle qui a été trouvée par Métius $\frac{355}{113}$: elle est facile à retenir, si l'on fait attention que le dénominateur et le numérateur, écrits sur la même ligne, forment une suite composée des trois premiers nombres impairs 1. 3. 5. répétés chacun deux fois : les trois premiers chiffres d'une pareille suite forment le dénominateur, et les trois derniers composent le numérateur : ou si l'on veut renverser la fraction $\frac{113}{355}$, l'on aura le rapport du diamètre à la circonférence. Enfin, si l'on veut avoir ce rapport en décimales, on trouvera que le diamètre étant 1, la circonférence est 3,14159.... Cette fraction convertie en série par la méthode du pro-

(1) On trouve dans le Journal de l'Ecole Normale $3, \frac{8}{70}$; ce rapport est $<$ que celui de $3\frac{10}{71}$ de $\frac{132}{4970}$.

blême (117), donnera $3, + \frac{1}{7} - \frac{1}{7,111} - \ldots$ etc. les deux premiers termes réunis donnent le rapport d'Archimède, en y ajoutant le troisième, on a celui de Métius, et l'on voit que la différence du rapport d'Archimède à celui de Métius est $\frac{1}{7,111}$.

Scholie deuxième. On vient de voir que toutes les figures régulières ou irrégulières peuvent se réduire en triangles de même surface, et les triangles en quarrés, ainsi l'évaluation des surfaces consiste à savoir mesurer les quarrés; or, la mesure de ces sortes de figures dépend de leur comparaison avec un quarré donné pris pour unité de surface, et l'expression de leur rapport est toujours donnée en des termes faciles à saisir; donc la géométrie des surfaces ne laisse rien à desirer pour l'exactitude et la précision.

235. *(f). Théorême cinquième.* Trouver la commune mesure, s'il y en a une, entre la diagonale et le côté du quarré.

Soit le quarré $ACBM$, la diagonale AB est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle ACB;
Fig. 105. donc $\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AC}^2$, et $AB = AC\sqrt{2}$ ou $\frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$; or, on sait par l'arithmétique que la racine de deux est incommensurable; donc le rapport de la diagonale au côté est incommensurable.

Mais il s'agit de démontrer cette proposition géométriquement et indépendamment du calcul.

Pour trouver la commune mesure de deux lignes, il faut porter la plus petite sur la plus grande autant de fois qu'elle y est contenue, ensuite le premier reste sur la plus petite, et, etc. (117) en portant BC sur AB, on trouve qu'elle y est contenue une fois, plus un reste BD. Il faut comparer BD à BC: on trouvera qu'elle y est contenue deux fois avec un

reste qu'il faudroit comparer à BD; mais comme ces restes vont toujours en diminuant et que bientôt ils échapperoient à la vue par leur petitesse, on ne pourroit pas découvrir par ce moyen si les deux lignes en question ont une mesure commune. Pour éviter les lignes décroissantes et n'avoir qu'à opérer sur des lignes qui restent toujours de la même grandeur, on considérera que l'angle BCA étant droit, la ligne BC est tangente, et BN est une sécante menée du point B par le centre; donc le rapport $BC : DB$ est le même que celui de BN à BC. Mais BN contient BC 2 fois, plus un reste DB; donc le résultat de la seconde opération est le quotient 2 avec un reste BD qu'il faut comparer à BC. Cette troisième comparaison se fera en substituant de nouveau le rapport $BC : DN$ à son égal $DB : BC$, ce qui donnera le même quotient 2 et le même reste DB.

De-là il résulte que l'opération n'aura pas de fin, et qu'ainsi il n'y aura pas de commune mesure entre la diagonale et le côté du quarré.

Si on vouloit exprimer en nombres la valeur approchée de ce rapport, on le pourroit par le moyen de la fraction continue suivante :

La première opération a donné pour quotient 1, la seconde 2, la troisième et les suivantes donneront toujours 2 à l'infini; donc le côté du quarré étant représenté par 1, la diagonale sera représentée par la fraction continue

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}$$

Arith. (72).

ARTICLE II.

Du toisé des surfaces (1).

236. Toiser une surface, c'est déterminer en nombres combien de fois elle contient une surface connue prise pour unité de mesure.

Les surfaces qui servoient d'unité de mesure dans ces sortes d'opérations étoient la toise quarrée, le pied quarré, le pouce quarré.

Pour toiser un rectangle, on mesuroit successivement avec la toise, la hauteur et la base de ce rectangle, et lorsque chacune des deux mesures donnoit uniquement des toises sans aucun reste, on avoit aisément la surface de ce rectangle en multipliant le nombre des toises contenues dans la base par le nombre des toises contenues dans la hauteur. Ainsi en supposant la base de 13 toises et la hauteur de 6 toises, la surface du rectangle seroit de 78 toises quarrées.

Mais si une toise ne mesuroit pas exactement les côtés du rectangle, en sorte qu'il y eût un reste composé de pieds et de pouces, alors la surface seroit égale à un certain nombre de toises quarrées complètes, avec un excédant composé de parties de la toise quarrée. Pour évaluer cet excédant, on avoit subdivisé la toise quarrée, qui portoit aussi le nom de toise-toise, en six rectangles qui auroient chacun une toise de hauteur et un pied de largeur, et qu'on appeloit pour cela une toise-pied. La toise-

(1) Cet article est extrait en partie de l'instruction sur les mesures, publiée par la commission temporaire des poids et mesures républicaines.

pied à son tour étoit subdivisée en douze petits rectangles qui avoient chacun une toise de hauteur sur un pouce de largeur, et que l'on appeloit toise-pouce, et le calcul donnoit le nombre de toises-pieds, de toises-pouces, etc. qui formoient l'excédant des toises quarrées renfermées dans la surface.

La manière ordinaire de faire le calcul, consistoit à multiplier par parties le nombre des toises et des subdivisions de la toise, contenues dans les deux dimensions du rectangle, ce qui exigeoit beaucoup d'attention, et une grande pratique de la méthode du toisé; on peut en voir les détails dans la géométrie de Bézout, de Bossut, etc.

La division décimale adoptée dans le nouveau système des poids et mesures, fait disparoître toutes ces difficultés de calcul.

L'unité de mesure qui a remplacé la toise quarrée est le mètre quarré.

La division par dix, donnera pour estimer l'excédant des dixièmes, des centièmes, des millièmes de mètre quarré.

Supposons que $ABCD$ représente un mètre quarré, si nous divisons la base AB en dix parties égales qui seront des décimales, et si par les points de division nous tirons autant de parallèles mn, il est visible que chaque bande $AmnD$, sera un dixième du mètre quarré. Maintenant nous pouvons imaginer qu'ayant divisé de même les petits côtés Am des rectangles précédens chacun en dix parties égales, qui seront des centimètres, on ait tiré aussi des lignes parallèles par les points de division, il est encore évident que chaque rectangle égal à un dixième de mètre quarré, se trouvera subdivisé à son tour en dix autres rectangles, qui seront des centièmes de mètre quarré. L'on voit par-là que toutes les parties qui soudivisent le mètre quarré, ont une Fig. 105.

hauteur égale au mètre linéaire, sur une largeur qui est égale successivement à un décimètre, ou un centimètre.

Supposons, par exemple, un rectangle dont la
Fig. 106. hauteur *AD* contienne trois mètres et deux décimètres $= 3^{mt}, 2$, et la base *AB* cinq mètres et un décimètre $= 5^{mt}, 1$. Pour trouver la surface, il faut multiplier 5,1 par 3,2, le produit sera 16,32; ce produit est un nombre abstrait (212), qui exprime le rapport de la surface au mètre quarré. Si l'on veut qu'il soit la mesure absolue du rectangle, il faut le supposer multiplié par un mètre quarré, et pour lors il indiquera 16 mètres quarrés, plus 3 dixièmes de mètre quarré, plus 2 centièmes de mètre quarré.

Pour se faire une idée de ce résultat, il suffit de jeter les yeux sur la figure. On comptera d'abord 15 mètres quarrés compris dans l'espace *Amnr*; on trouvera ensuite 10 dixièmes de mètre quarré, disposés deux à deux dans l'espace *npDr*; et dans l'espace *mnqB*, 3 dixièmes de mètre quarré. Enfin le petit rectangle *nqCp* contiendra 2 centièmes de mètre quarré; réunissant le tout, on trouve par l'inspection de la figure, comme par le calcul, 16 mètres quarrés, 3 dixièmes de mètre quarré, et deux centièmes de mètre quarré.

237. *Problème premier.* Evaluer la surface d'un triangle dont la base est de $12^{mt}, 3$, et la hauteur $15^{mt}, 6$.

Multipliez la base par la moitié de la hauteur (218), et vous aurez. 12,3

$$\begin{array}{r} 12,3 \\ 7,8 \\ \hline 984 \\ 861 \\ \hline 95,94 \end{array}$$

C'est-à-dire que la surface de ce triangle est de 95 mètres quarrés, plus 9 dixièmes de mètre quarré, plus 4 centièmes de mètre quarré.

238. *Problême deuxième.* Evaluer la surface d'un hexagone régulier dont chaque côté est de 3^{mt}, 2 ; si chaque côté est de 3^{mt}, 2, le périmètre sera de 19^{mt}, 2, et la moitié $= 9^{mt}, 16$.

On calculera le rayon droit par la propriété du triangle rectangle, et on le trouvera de 2^{mt}, 7 à-peu-près ; donc la surface sera $9{,}6 \times 2{,}7 = 25$, 92^{mt}, 9.

Problême troisième. Evaluer la surface d'un cercle qui a 5_{mt}, 3 de rayon.

Si le rayon est de 5^{mt}, 3, le diamètre 10,6, pour trouver la circonférence on fera la proportion suivante, $7 : 22 :: 10{,}6 : x = 33^{mt}, 3$; donc la surface sera $\frac{5{,}3 \times 33{,}3}{2} = 88{,}24$.

ARTICLE III.

Des mesures agraires ou de l'arpentage.

239. Les mesures agraires sont celles qui servent à évaluer l'étendue des parties d'un terrein, comme d'un champ, d'une prairie, d'un bois.

Dans ces sortes de mesures il faut, comme dans le toisé, prendre la longueur des dimensions de la surface, les évaluer en mesures connues, et multiplier l'une par l'autre.

Les mesures qui étoient le plus en usage dans l'arpentage, étoient la perche pour les longueurs, et l'arpent pour les surfaces; ces deux mesures avoient, sous un même nom, des valeurs différentes dans différens pays. La perche de Paris étoit de 3 toises

ou 18 pieds, la perche des eaux et forêts étoit de 22 pieds. L'arpent étoit composé de 100 perches quarrées, par conséquent le grand arpent contenoit 100 perches quarrées de 22 pieds, et l'arpent de Paris contenoit 100 perches quarrées de 18 pieds.

Dans les nouvelles mesures on appelle *are* (du mot latin *arare*, labourer), un quarré qui a dix mètres ou un décamètre de côté.

Le décaare est une superficie qui représente dix ares, l'hectare contient cent ares, le kilare en contient mille, et le miriare dix mille.

Le déciare est une surface qui est la dixième partie de l'are, c'est-à-dire, un rectangle qui a dix mètres de hauteur, et un mètre de base.

Le centiare est une surface qui est la centième partie de l'are, et la dixième partie du déciare, c'est-à-dire, un mètre quarré.

Dans les mesures agraires, on ne fera guère usage que de l'are, qui remplacera la perche quarrée, et de l'hectare qui remplacera l'arpent : le miriare sera quelquefois employé pour évaluer les grands territoires.

La perche quarrée de 22 pieds, vaut 0,5138 d'are, et l'arpent quarré vaut la même fraction de l'hectare ; c'est-à-dire, que deux perches quarrées valent un peu plus qu'un are ; et deux arpens un peu plus qu'un hectare.

240. Voici le tableau du rapport des mesures de superficie à la toise quarrée.

Miriare, kilomètre quarré....	263416 tois. quar.
Kilare....................	26341,6
Hectare, hectomètre quarré.	2634,16
Décare..................	263,416
Are, décamètre quarré.....	26,342
Déciare..................	2,634
Centiare, mètre quarré....	0,263

141. *Problême.* Evaluer la surface d'une prairie de figure rectangulaire, ayant 13 décamètres et 3 mètres de base, sur 8 décamètres et 4 mètres de hauteur.

Multipliez la base par la hauteur, le produit sera un nombre abstrait, représentant le rapport de la surface demandée, à l'are, ou, si l'on veut, chaque unité de ce produit représentera un are.

Ainsi $13,3 \times 8,4 = 111,72$; donc la surface de la prairie est de 111 ares 7 déciares et 2 centiares.

ARTICLE IV.

Du rapport des surfaces semblables.

242. Nous nous sommes déjà occupés du rapport des surfaces en géneral (206); il n'est question dans cet article que du rapport des surfaces semblables, c'est-à-dire, dont les dimensions homologues sont en proportion.

243. *Théorême.* Les surfaces semblables sont entr'elles comme les quarrés des lignes homologues.

Car les surfaces en général sont entr'elles en raison composée des dimensions qui entrent dans leur expression; ainsi deux rhombes quelconques, ou deux triangles, ou, etc., sont entr'eux en raison composée de leurs bases et de leurs hauteurs; mais quand les figures sont semblables, le rapport des bases est le même que celui des hauteurs; donc la raison composée devient une raison doublée; donc elle est la même que celle des quarrés des bases, ou des quarrés des hauteurs, ou en général des lignes semblablement tirées dans les deux figures.

244. *Corollaire.* Deux triangles équilatéraux, deux quarrés, deux hexagones réguliers, deux cer-

cles, etc., sont entr'eux comme les quarrés de leurs lignes homologues.

245. *Scholie premier.* Les figures irrégulières et semblables, sont aussi entr'elles comme les quarrés des lignes homologues ; car on pourra toujours les diviser par des diagonales en un égal nombre de triangles semblables ; or chaque triangle sera à son correspondant, comme le quarré de sa base au quarré de la base correspondante ; et la somme des triangles de la première figure, sera à la somme des triangles de la seconde, comme le quarré d'une base dans la première figure est au quarré de la base correspondante dans la seconde figure.

146. *Scholie deuxième.* On peut déduire de ces rapports une méthode de mesurer un grand terrein. On commence par dessiner en petit le terrein qu'on veut évaluer, en le rapportant à une échelle dont on connoît le rapport avec la ligne qu'on a prise pour base ; on évalue la figure du petit polygone ; on multiplie ensuite cette surface par le quarré du rapport de la longueur de l'échelle à celle de la base, et le produit est l'expression de la surface demandée.

Fig. 107. 247. *Problême premier.* Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable égale à leur somme.

Soient les deux figures semblables, deux hexagones ou deux pentagones dont les deux côtés homologues sont AB, ab ; on élève la ligne Ab perpendiculairement à l'extrémité de AB, on joindra Ab, et l'hypoténuse de ce triangle rectangle sera le côté homologue du polygone demandé.

Car puisque les polygones sont semblables, ils sont entr'eux comme les quarrés des côtés homologues : or, le quarré fait sur l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés faits sur les deux côtés ; donc

donc le polygone qui aura l'hypoténuse pour côté, sera égal à la somme des deux polygones semblables qui auront pour côtés homologues les deux lignes AB, ab.

248. *Probléme deuxième.* Construire une seule figure égale à la somme de tant de figures semblables qu'on voudra.

Ne supposons d'abord que trois figures semblables, dont les côtés homologues soient représentés par les trois lignes AB, ab, mn : après avoir Fig. 107. construit le triangle rectangle ABb sur les deux lignes AB, Ab, réspectivement égales à AB et à ab, élevez au point b, perpendiculairement sur l'hypoténuse bB la droite bn égale à mn, et tirez Bn. Cette dernière ligne sera le côté homologue du polygone; car le quarré fait sur Bn égalera le quarré fait sur bn, plus le quarré fait sur Bb : mais le quarré fait sur Bb égale le quarré fait sur AB, plus le quarré fait sur Ab ; donc le quarré fait sur Bn égalera la somme des trois quarrés faits sur AB, ab, mn, et par conséquent la figure qui aura Bn pour côté homologue aux trois côtés donnés, égalera les trois figures données.

ARTICLE IV.

Des plans et des angles solides.

249. Un plan est une surface sur laquelle une ligne droite peut être appliquée en tout sens, de manière qu'elle coïncide dans tous ses points et dans toutes ses différentes positions avec cette surface.

Une ligne est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle fait des angles droits avec toutes les droites

qui vont se réunir à son point de rencontre avec le plan.

Deux plans sont parallèles entr'eux, lorsque les perpendiculaires abaissées de tous les points du premier plan sur le second sont égales.

Une ligne est parallèle à un plan, lorsqu'elle est toute entière dans un plan parallèle au plan donné.

250. *Théorème*. Le plan est la plus courte surface qu'il puisse y avoir entre deux lignes données. Soit un plan quelconque MN : soit pris dans le plan un point n, par lequel on mènera deux lignes droites np, nq : ces deux droites seront dans la sur-
Fig. 117. face plane, par la définition du plan. Or, je dis que la partie de la surface plane terminée par ces lignes sera la plus courte qu'il puisse y avoir entre ces lignes. Soit pris sur chaque ligne un point r, s, par lesquels on mènera la droite r, s, qui sera toute entière dans le plan : s'il existoit une surface, passant par les deux lignes np, nq, plus courte que la surface plane, la ligne $s\ t\ r$ qui seroit toute entière dans cette surface, et qui passeroit par les points r, s, seroit plus courte que rs; donc celle-ci ne seroit pas droite, ce qui est contre la supposition.

251. *Corollaire*. Entre deux lignes données, on ne peut mener qu'un seul plan : car si on en menoit deux, ils seroient tous les deux les plus courtes surfaces comprises entre deux lignes données; donc ils se confondroient.

252. *Scholie*. La position respective de deux lignes droites est déterminée par trois points non posés en ligne droite; car si les deux lignes se rencontrent, telles que np, nq, il suffira de connoître la position du point de rencontre n et des deux points p et q : si elles sont parallèles, telles que MP, NQ, il suffira de connoître la position de deux points

N, *Q*, pris sur une ligne, et d'un point quelconque *M* par où doit passer la parallèle.

253. *Corollaire.* Donc un triangle *ABC* ou trois points qui ne sont pas en ligne droite, déterminent la position d'un plan (1). Fig. 108.

254. *Théorême.* Si deux plans se coupent, leur commune intersection sera une ligne droite.

Soient les deux plans qui se coupent *MN*, qu'on peut regarder comme le plan de la figure, et *PQ* perpendiculaire ou incliné au premier : si dans les points communs aux deux plans, on en trouvoit trois *A*, *B*, *C* qui ne fussent pas en ligne droite, les deux plans passant par ces trois points, ne feroient qu'un seul et même plan, ce qui est contre la supposition. Fig. 108.

255. *Théorême.* D'un point pris hors d'un plan, on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire sur le plan.

Car si on pouvoit en mener deux, soient *AB*, *AC*, ces deux perpendiculaires, en joignant leurs pieds par une ligne droite *BC*, on auroit deux perpendiculaires abaissées d'un même point sur une même ligne, ce qui est impossible (46). Fig. 112.

256. *Théorême.* D'un point pris sur un plan, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à ce plan.

Car si on pouvoit en élever deux *BA*, *BD*, conduisez par ces deux lignes dans le plan *MN* la ligne *BC*. Alors l'angle *ABC* sera droit, l'angle *DBC* Fig. 111.

---

(1) On sait qu'une ligne est droite, lorsque tous ses points pris trois à trois sont dans la même direction ; semblablement une surface est plane lorsque tous ses points pris quatre à quatre sont situés dans un même plan, d'où il s'ensuit qu'une surface non plane est celle dont tous les points pris quatre à quatre ne sont pas dans le même plan.

sera aussi droit; on auroit donc deux perpendiculaires menées par un même point de la ligne BC, ce qui est impossible; donc, etc.

257. *Théorème*. Si une droite AB est perpendiculaire à deux autres CD, EF, qui se croisent à son pied dans le plan MN, elle sera perpendiculaire à une droite quelconque HG, menée par son pied dans le même plan.

Fig. 120. Prenez sur les deux lignes données CD, EF, des parties égales BC, BD, BE, BF; tirez les deux lignes EC, DF.

1°. Les deux triangles EBC, DBF sont égaux et isocèles; car les angles EBC, DBF sont opposés au sommet, et les côtés qui les renferment sont égaux par la construction; donc $EC = DF$.

2°. Les lignes AC, AE, AD, AF, sont égales; car les quatre triangles ABC, ABE, ABF, ABD sont égaux, puisqu'ils ont tous un angle droit, compris entre deux côtés égaux.

3°. Les deux triangles EAC, FAD sont égaux, car ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

4°. Les deux triangles CBG, DBH sont égaux, car ils ont deux angles égaux et le côté compris égal; donc $CG = DH$ et $BG = BH$.

5°. Les triangles EAG, DAH sont égaux, car ils ont deux côtés égaux et l'angle compris entre ces côtés égal; donc $AH = AG$.

6°. Les deux triangles ABG, ABH sont égaux, car ils ont les trois côtés égaux; donc l'angle $ABG = ABH$; donc la ligne AB ne penche pas plus du côté de G que de H, donc elle est perpendiculaire sur GH.

Et réciproquement, si une ligne AB est perpendiculaire sur trois lignes qui aboutissent au même point, les trois lignes seront dans le même plan.

Car 1°. les deux lignes *CB*, *EB* sont dans le même plan que les deux premières; car si elles n'y étoient pas, si elles étoient, par exemple, au-dessus ou au-dessous du plan de la figure, soit tiré *BK* dans le même plan vertical que *GB*, et dans le plan de la figure, qui est celui des deux lignes *EB*, *CB*. L'angle *ABK* sera droit (par la première partie du théorème); mais *ABG* sera également droit par la supposition; donc on auroit $ABG = ABK$, ce qui est impossible.

258. *Corollaire.* Une ligne perpendiculaire sur deux lignes qui se coupent dans un même plan, l'est aussi sur le plan de ces deux lignes : car elle l'est sur toutes les lignes qui passent par le point de rencontre.

259. *Théorème.* Les obliques *AG*, *AH* également éloignées de la perpendiculaire, sont égales.

Car les deux triangles rectangles *ABG*, *ABH* ont un angle égal compris entre deux côtés égaux; donc ils sont égaux en tout; et par conséquent l'hypoténuse $AG = AH$.

260. *Scholie.* Toutes les obliques égales *AG*, *AH* étant également éloignées de la perpendiculaire, aboutissent sur la circonférence d'un cercle qui a pour rayon *BG*; donc étant donné un point *A* hors d'un plan, si l'on veut trouver le point *B*, où tomberoit la perpendiculaire abaissée du point *A*, il faut marquer sur le plan trois points également éloignés du point *A*, et chercher le centre du cercle qui passeroit par ces trois points.

261. *Théorème.* Deux lignes parallèles sont toujours dans un même plan.

Soient les deux parallèles *AB*, *DC*, joignez les Fig. 111.
points *B*, *C* par une perpendiculaire aux deux lignes *BC*. Au point *B*, tirez *DB*: par le point *B* menez

FB égale à DC, et perpendiculaire au plan de la figure, c'est-à-dire, au plan ABC.

Il faut démontrer qu'elle est aussi perpendiculaire à la ligne DB, et par conséquent que le point D est dans le plan ABC (257).

Les triangles DCB, BCF sont égaux, car BC est commun aux deux triangles, $BF = DC$ par la construction. L'angle DCB est droit, ainsi que CBF; donc le côté $DB = CF$.

Le triangle $DCF = DBF$; car ils ont les trois côtés égaux. Or le triangle DCF est rectangle en C; donc DBF est aussi rectangle en B; donc l'angle DBF est droit, et par conséquent FB est perpendiculaire sur DB; donc les quatre points A, B, C, D, et par conséquent les deux lignes AB, DC sont dans le même plan.

262. *Corollaire.* Deux lignes parallèles déterminent la position d'un plan.

Fig. 112. 263. *Théorême.* Si la ligne AB est perpendiculaire au plan MN, toute ligne CE, parallèle à AB, sera perpendiculaire au même plan.

Conduisez un plan suivant les parallèles AB, EC, dont l'intersection avec le plan MN, soit la ligne BC, les deux parallèles seront perpendiculaires à la section du plan BC (102), et le plan ECB sera perpendiculaire au plan de la figure; faites tourner le plan sur la ligne EC, de manière qu'il prenne la position ECD, la ligne EC sera encore perpendiculaire sur CD; donc elle sera sur le plan de la figure (258).

Fig. 113. 264. *Théorême.* Deux plans MN, PQ, perpendiculaires à une même ligne droite; sont parallèles entr'eux.

Car s'ils se rencontroient quelque part, soit O un de leurs points de rencontre, joignez OA, OB,

la ligne AB, perpendiculaire au plan MN, est perpendiculaire à la droite OA, menée par le point A dans le plan MN. Par la même raison AB est perpendiculaire sur OB; donc OA et OB seroient deux perpendiculaires abaissées du même point O sur la même ligne droite, ce qui est impossible; donc les plans MN, PQ ne peuvent se rencontrer, donc ils sont parallèles.

265. *Théorème.* Deux droites, comprises entre deux plans parallèles, et coupées par un troisième plan, parallèle aux deux autres, sont coupées en parties proportionnelles.

Soient les deux droites AB, CD.... des points Fig. 114.
A et C, abaissons les perpendiculaires AN, CM, et tirons PR, RQ, par la propriété des triangles semblables, on a $CP : CR :: CM : CD$, et $AQ : AR :: AN : AB$; mais $CP = AQ$, et $CM = AN$, puisque ce sont des droites perpendiculaires comprises entre des plans parallèles; donc les conséquens formeront la proportion $CR : CD :: AR : AB$.

266. *Définition.* Si on présente un plan $PAMB$, Fig. 116.
sur un autre $CNAM$ dans une situation inclinée, la commune section des deux plans, est la ligne MA, sur laquelle le plan MP rencontre l'autre MN. Cette ligne d'intersection se nomme l'arête des plans, et l'angle formé par les deux plans dans toute la longueur de l'arête, se nomme *coin.*

Pour juger de l'angle d'inclinaison, il faut former un angle dont les deux lignes soient une dans un plan, et l'autre dans l'autre plan; mais toutes deux perpendiculaires à la commune section, telles que BM, MC, PA, AN; car si l'on tiroit les lignes obliquement, comme LH, HG, on forme-

roit des angles plus petits ou plus grands, qui n'auroient aucun rapport fixe avec l'angle des deux plans, et qui, en faisant mouvoir les deux plans sur la ligne *AM*, n'auroient pas une marche uniforme ou égale à celle des plans : la ligne perpendiculaire est la seule qui décrit un cercle. Enfin, si l'on imagine les deux plans perpendiculaires l'un à l'autre, en sorte qu'ils fassent un angle droit, les lignes qui doivent mesurer leur angle doivent être perpendiculaires entr'elles ; or elles deviendront perpendiculaires entr'elles, si elles le sont à la commune section des deux plans ; donc, pour mesurer l'angle d'inclinaison de deux plans, il faut tirer dans chaque plan, et au même point de la commune section, une ligne perpendiculaire à la commune section. Ces lignes feroient dans leur point de rencontre, un angle égal à l'inclinaison des deux plans.

Fig. 116. Tous les plans qui passeront dans la direction de la perpendiculaire au plan de la figure, seront perpendiculaires à ce plan ; car la perpendiculaire au plan, l'étant à toutes les lignes qui passent par son pied, sera aussi perpendiculaire à l'intersection commune au plan et à la ligne menée dans le plan de la figure perpendiculairement à l'intersection.

Deux plans parallèles, coupés par un troisième plan oblique, présenteront les mêmes angles que deux droites parallèles coupées par un oblique ; car si ces plans sont vus de profil, ils présenteront
Fig. 114. la figure de deux droites parallèles, coupées par une oblique.

Donc, 1°. les angles *internes externes* seront égaux ; 2°. les angles *alternes internes* seront égaux, 3°. les angles *alternes externes* seront égaux ;

4°. la somme de deux angles adjacens, vaudra deux angles droits.

Si plusieurs plans ont une intersection commune, la somme de tous les angles autour de la ligne d'intersection vaudra quatre angles droits.

Un angle solide est formé par la réunion de plusieurs angles situés dans différens plans, et qui, en se réunissant autour d'un même point, interceptent tout l'espace autour de ce point, d'où il suit que, pour former un angle solide, il faut au moins la réunion de trois plans différens.

On mesure un angle solide, en prenant la somme des angles plans qui les forment.

267. *Lemme premier.* Soient les deux lignes droites AC, CG, perpendiculaires entr'elles au point C, par deux points donnés AB sur la ligne AC, Fig. 122.
faisons passer une circonférence de cercle qui touche la ligne CG en un point D; si des points D, G, etc. de la ligne CG, on mène des lignes aux deux points donnés A, B, le plus grand des angles que ces lignes font entr'elles, sera celui qui a son sommet au point D, où la ligne CG touche le cercle.

Car l'angle ADB étant inscrit, a pour mesure la moitié de l'arc AB, et tous les autres angles étant circonscrits et appuyés sur le même arc concave, ont nécessairement pour mesure un arc moindre que la moitié de AB.

268. *Lemme deuxième.* Si par le point D on élève la ligne DM, perpendiculaire au plan de la figure, et qu'on fasse tourner successivement les triangles ABG, ABF, sur la ligne AB, jusqu'à ce que leurs sommets G, F soient dans la perpendiculaire DM, ces angles ne changeront pas de valeur.

Car il est visible que le triangle AGC, par exemple, en tournant sur AC, conserve dans toutes ses positions les deux mêmes côtés AC,CG, et l'angle C, donc l'angle G ne change pas de valeur. On en peut dire autant du triangle BCG, en tournant sur BC; donc lorsque le sommet de l'angle AGB sera dans la verticale DM, sa valeur sera la même que lorsqu'il est couché dans le plan de la figure.

269. *Corollaire.* Si plusieurs angles ABD, ABF', ABG, appuyés sur une même base ont leur sommet sur une même ligne menée perpendiculairement au plan de la figure ABD, le plus grand de ces angles, sera celui qui est formé par les deux lignes AD,BD, perpendiculaires sur MD, et qui sont par conséquent les plus courtes qu'on puisse mesurer des points A, B sur la ligne MD.

Fig. 118. 270. *Théorème.* La somme des angles plans qui forment un angle solide, est toujours moindre que quatre angles droits.

Soit l'angle solide M, formé par la réunion des six angles plans BMC,CMD,DMF.... etc. du point M abaissez la perpendiculaire MO, et du point O tirez les lignes OB, OC, OD, OF.... à toutes les pointes du polygone de la base, on a $BMC < BOC$ (lemme), et $CMD < COD$.... donc la somme des angles plans formant le solide, sera plus petite que la somme des angles plans autour du point O; or cette dernière somme égale quatre angles droits; donc on a l'angle solide $<$ que quatre angles droits.

271. *Scholie.* La limite d'un angle solide est quatre angles droits; car plus un angle solide est grand, plus il approche de 360^d, sans pouvoir ja-

mais égaler quatre angles droits, mais il peut n'en différer qu'aussi peu qu'on voudra.

Si la ligne MO étoit oblique sur la base comme SA, on supposeroit un plan coupant perpendiculaire à SA, et l'on prouveroit comme ci-dessus, que l'angle solide S, seroit plus petit que la somme des angles plans, réunis autour du point d'intersection de la ligne SA avec le plan coupant. Fig. 119.

272. *Théorême.* Si un angle solide est formé par trois angles plans, la somme de deux quelconques de ces angles sera plus grande que le troisième.

Soit l'angle solide C, formé par la réunion des trois plans ACB, ACS, SCB (le point S est relevé au-dessus de la figure), soit l'angle ACB le plus grand des trois, je dis que l'on aura $ACS + SCB > ACB$. Fig. 119.

Du point S, abaissez sur le plan de la figure la perpendiculaire SO, menez dans ce même plan les lignes CO, OR; du point S, tirez SR, SL, perpendiculaires aux lignes CB, CA.

On a, 1°. $ACB = ACO + OCR$, en second lieu les deux triangles CSR, COR sont rectangles; donc la somme des deux angles $CSR + SCR = COR + RCO$; mais $CSR < COR$ (lemme); donc $SCR > OCR$.... par la même raison on a $SCL > LCO$; donc $SCL + SCR < ACB$.

273. *Problême.* Etant donnés deux angles plans, déterminez les limites du troisième, qui réuni aux deux premiers, peuvent faire un angle solide.

Soient les trois angles plans ACB, SCA, SCB, formant l'angle solide C; soient donnés les angles SCA, SCB, par le théorême précédent on a Fig. 119.

$ACB < SCA + SCB$. Par la même raison on doit avoir $SCA < ACB + SCB$, $ACB > SCA - SCB$; donc le troisième angle doit être plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence.

LIVRE III.

DE LA GÉOMÉTRIE DES SOLIDES.

274. On appelle en géométrie *solide*, tout ce qui est étendu dans trois sens différens.

On peut concevoir un solide formé par le concours de plusieurs plans qui, se réunissant par leurs côtés ou arêtes, forment des angles solides, et interceptent un espace; il faut au moins quatre plans pour intercepter un espace. Le solide considéré sous ce rapport, porte le nom de polyèdre.

275. On appelle polyèdre régulier, celui dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux, et dont les angles solides sont égaux entr'eux.

Le nombre des polyèdres réguliers est déterminé par la combinaison des angles plans égaux, qui réunis au nombre de trois au moins, peuvent donner un angle solide, moindre que quatre angles droits.

Il ne peut y avoir par conséquent que cinq polyèdres réguliers, savoir: trois dont les faces sont des triangles équilatéraux, un dont les faces sont des quarrés, et un dont les faces sont des pentagones.

Chaque angle d'un triangle équilatéral vaut 60^d (143); donc trois angles réunis formeront $180^d < 360^d$; mais comme ces trois plans ne suffisent

pas pour intercepter un espace fermé de toutes parts, il faudra y ajouter un quatrième, qui sera la base du polyèdre, et qui, réuni aux trois autres, formera des angles solides égaux. Ce polyèdre est
Fig. 142. nommé *tétraèdre.*

Si on réunit quatre triangles équilatéraux, on formera un angle solide de $240^d < 360^d$, et si à ces quatre plans on en adosse quatre autres, en les joignant par leur base, on formera un polyèdre à huit
Fig. 129. faces triangulaires, appelé *octaèdre.*

Cinq triangles de même nature, réunis par leurs pointes, peuvent former un angle solide de $300^d < 360^d$, et si on prend 20 de ces triangles pour intercepter un espace, on formera un polyèdre à
Fig. 132. 20 faces triangulaires, appelé *icosaèdre.*

Six triangles équilatéraux réunis, donneroient une somme de 360^d, et par conséquent ne pourroient pas former un angle solide.

Chaque angle du quarré vaut 90^d; donc trois de ces angles réunis, formeront un angle solide de 270^d. Si on prend quatre quarrés pour les réunir par leurs arêtes, on formera un polyèdre à 6 faces, appelé
Fig. 130. *exaèdre* ou *cube*; quatre de ces angles formeroient une somme de 360^d, ce qui ne pourroit donner un angle solide.

Enfin, chaque angle du pentagone régulier, vaut 108^d; trois de ces angles réunis, formeront un angle solide de 324^d, et on pourra composer un polyèdre régulier de douze faces pentagonales,
Fig. 131. appelé *dodécaèdre.*

Quatre angles du pentagone, feroient 432^d; ils ne pourroient donc pas former un angle solide.

Les hexagones et les polygones d'un plus grand nombre de côtés, réunis au nombre de trois, donneroient une somme égale ou plus grande que

360^d. On ne peut donc pas former d'angle solide avec de pareils polygones (1).

276. Le prisme est un solide terminé par des bases égales et parallèles, comprises entre des plans dont les arêtes sont parallèles.

Si les arêtes sont perpendiculaires à la base, les plans seront des rectangles et le prisme sera droit; si elles sont inclinées sur la base, les plans seront des rhombes, et le prisme sera oblique. Fig. 133, 134.

La hauteur du prisme droit ou oblique est la perpendiculaire abaissée de la base supérieure sur la base inférieure.

Le prisme qui a pour base un rhombe, a aussi des rhombes ou des rectangles pour faces latérales, on le nommoit *parallélépipède;* mais l'étymologie de ce mot ne signifie pas plus une figure à quatre faces parallèles qu'à six ou à huit. Ainsi on substitue le rhombe, à celui de parallèlogramme. Si la base et les faces totales sont des rectangles, le prisme sera droit. Fig. 135, 137.

Si la base étant un rectangle ou rhombe, les faces latérales sont des rhombes, le prisme sera oblique.

Si les six plans qui composent la surface du prisme sont des quarrés, le solide prend le nom d'hexaèdre ou de cube.

277. La pyramide est un solide dont la base est un polygone quelconque, et dont les faces la-

---

(1) On pourroit penser qu'en adossant par leurs bases deux tétraèdres réguliers égaux, on formeroit un polyèdre régulier composé de six faces triangulaires égales; mais les angles solides ne seroient pas composés d'un égal nombre d'angles plans égaux; par conséquent ils ne seroient pas égaux.

térales sont des triangles qui se réunissent à un même point qu'on nomme le sommet, telle est la
Fig. 143, 144. pyramide *ABCDFM.*

La perpendiculaire *MO*, abaissée du sommet *M* sur la base, en est la hauteur.

La pyramide est droite, lorsque la perpendiculaire, abaissée du sommet, va aboutir au centre de la base, cette perpendiculaire se nomme l'axe de la pyramide.

Dans les pyramides régulières, les faces latérales sont des triangles isocèles égaux.

Si du sommet *M* on tire une droite perpendiculaire sur un des côtés de la base, cette ligne mesurera la hauteur de tous les triangles, et s'appellera l'apothême de la pyramide.

Le cylindre est un prisme dont la base et toutes les sections parallèles à la base sont des cercles ; on peut le concevoir produit par la révolu-
Fig. 123. tion d'un rectangle, qui tourne sur un de ses côtés, et qui laisse par-tout des traces de son passage. C'est pour cette raison qu'il est rangé parmi les corps qu'on nomme solides de révolution.

La ligne qui passe par le centre des deux bases est nommée l'axe du cylindre, il en mesure la hauteur, lorsque le cylindre est droit.

Si on inscrit et circonscrit au cercle de la base du cylindre un polygone *ABCDE*, et que sur ce polygone on construise un prisme de même hauteur que le cylindre, il est visible que les arêtes du prisme inscrit toucheront le cylindre dans toute leur longueur.

Il en sera de même des faces latérales du prisme circonscrit, en sorte qu'une section faite dans ces trois solides sur un point quelconque de la hauteur et parallèlement aux bases, présenteroit la figure
de

de deux polygones d'un égal nombre de côtés dont l'un seroit inscrit et l'autre circonscrit au même cercle (fig. 96).

279. Le cône est une pyramide dont la base est un cercle. On peut le concevoir formé par la révolution d'un triangle rectangle qui tourne autour du côté perpendiculaire, et qui laisse par-tout des traces de son passage. Ainsi le cône est encore un solide de révolution. Fig. 124.

Si l'on inscrit et circonscrit un polygone au cercle de la base, et que sur les polygones on construise deux pyramides qui viennent aboutir au même sommet que le cône, ces deux pyramides seront l'une inscrite et l'autre circonscrite au cône, et toucheront le cône, la première suivant son arête, la seconde suivant son apothême.

280. La sphère est un solide terminé par une surface courbe, dont tous les points sont également éloignés d'un point intérieur qu'on nomme centre. Fig. 127.

On peut concevoir la sphère produite par la révolution d'un demi-cercle tournant sur son diamètre, et laissant par-tout des traces de son passage. Ainsi la sphère est comme le cylindre et le cône un solide de révolution.

281. Si l'on inscrit et circonscrit un polygone à un cercle, ces deux polygones, en tournant avec le cercle, décriront des solides de révolution, qu'on nommera sphéroïdes, dont l'un touchera la sphère, suivant ses arêtes, et l'autre par le milieu de son apothême. Fig. 128.

Le rayon de la sphère est une droite menée du centre à un point de la surface; le diamètre est une droite passant par le centre, et égale à deux rayons.

282. On nomme grand cercle de la sphère, tout cercle qui a pour centre le centre même de la

sphère, et petit cercle celui dont le centre ne se confond pas avec celui de la sphère ; d'où il suit qu'un grand cercle partage la sphère en deux parties égales, et un petit cercle la partage en deux parties inégales.

ARTICLE PREMIER.

De la mesure des surfaces des corps solides.

283. La surface latérale d'un corps solide est la même que celle des plans qui l'entourent, sans y comprendre celle de ses bases supérieure et inférieure. La surface totale sera celle de ses plans latéraux et de ses bases.

284. *Théorême.* La surface latérale d'un prisme est égale au produit de l'une des arêtes de ce prisme par le contour d'une section faite par un plan auquel cette arête seroit perpendiculaire.

Fig. 113. Car puisque l'arête est supposée perpendiculaire au plan, les autres arêtes le seront aussi, puisqu'elles sont parallèles ; donc en considérant dans chacun des rhombes dont le prisme est composé, l'arête comme la base, et la partie de la section interceptée entre ses côtés comme la hauteur, sa surface sera égale au produit de l'arête par cette hauteur, et puisque toutes les arêtes sont égales, la surface de la somme des rhombes, ou la surface du prisme, est égale au produit de l'une quelconque des arêtes par le contour de la section faite par un plan qui lui est perpendiculaire.

285. *Théorême.* La surface latérale d'une pyramide droite et régulière, est égale au produit de son apothême par la moitié du contour ou périmètre de la base.

Fig. 118, 144. Car elle est égale à la somme des surfaces des triangles qui l'entourent ; or, tous les triangles étant

égaux, la somme de leurs surfaces est égale à celle d'un seul triangle, répétée autant de fois qu'il y a de triangles, ou à celle d'un triangle qui auroit une hauteur égale à la hauteur commune des triangles, et une base égale à la somme des bases des triangles; mais la hauteur commune est l'apothême, et la somme des bases, forme le contour de la base de la pyramide; donc.... etc.

286. *Scholie premier.* Si la pyramide étoit oblique, on ne pourroit pas évaluer sa surface par une seule opération, parce que les triangles qui l'entourent seroient inégaux, ou n'auroient pas même hauteur. Il faudroit pour lors évaluer chaque triangle séparément, et prendre la somme de tous.

Pour avoir la surface totale des solides, il faut estimer séparément celle des bases, et l'ajouter à la surface latérale.

287. *Scholie deuxième.* Les polyèdres réguliers étant terminés par des plans, il est visible que leur surface est égale à celle d'un de ces plans, répétée autant de fois qu'il y a de plans; et si les polyèdres étoient irréguliers, on n'auroit pas d'autre moyen d'estimer leur surface, que d'évaluer celle de chaque plan séparément, et de prendre la somme de ces surfaces partielles.

288. *Théorême.* La surface convexe ou latérale d'un cylindre, est égale au produit du contour de sa base par sa hauteur. Fig. 123.

Car si l'on inscrit et circonscrit un prisme polygonal à un cylindre, plus les polygones de la base auront de côtés, plus les deux prismes approcheront du cylindre, sans pourtant jamais lui devenir égaux, tant qu'ils seront prismes polygonaux; mais ils pourront en différer d'une grandeur moindre que toute quantité donnée; donc le cylindre est la li-

mite des prismes inscrits et circonscrits ; donc pour avoir la surface du cylindre, il faudra prendre celle de la limite des prismes polygonaux ; or pour avoir celle-ci, il suffit de convertir le polygone de la base en cercle ; donc la surface du cylindre est égale au produit de la hauteur par la circonférence de la base.

289. *Théorême.* La surface convexe d'un cône droit, est égale à la moitié du produit de son apothême, par le contour de sa base.

Car, soit décrit dans la base du cône un polygone *ABCDF*, et sur ce polygone soit construite une pyramide, ayant même hauteur, on prouvera, comme dans le théorême précédent, que le cône
Fig. 124. est la limite des pyramides qu'on peut lui inscrire et circonscrire ; mais à la limite des pyramides, le polygone de sa base devient cercle ; donc pour avoir l'expression de la limite des surfaces des pyramides inscrites et circonscrites, il suffit de substituer au contour du polygone celui du cercle, et à l'apothême de la pyramide celui du cône.

290. *Théorême.* La surface d'une pyramide tronquée par un plan parallèle à la base, est égale au produit de son apothême par la demi-somme du
Fig. 145. contour de ses deux bases supérieure et inférieure.

Car elle sera égale à la somme des trapèzes dont elle est composée : or, tous ces trapèzes ont même hauteur ; donc la surface demandée sera égale à celle d'un trapèze unique qui auroit pour hauteur la hauteur commune, et pour bases une ligne égale au contour du polygone supérieur pour la base supérieure, et égale au contour du polygone inférieur pour la base inférieure. Mais la surface d'un pareil trapèze seroit égale au produit de sa hauteur qui est la partie qui reste de l'apothême par la demi-somme des bases ; donc, etc.

La même surface est égale au produit de son apothême par le polygone moyen proportionnel arithmétique, entre la base supérieure et la base inférieure.

291. (g) *Corollaire.* La surface du cône tronqué est égale au produit de ce qui reste de l'apothême par la demi-circonférence, moyenne proportionnelle arithmétique entre les bases supérieure et inférieure. Fig. 124.

Car le cône tronqué est la limite des pyramides tronquées qu'on peut lui inscrire et circonscrire; donc pour avoir la surface du cône tronqué, il suffit de savoir ce que devient celle de la pyramide tronquée à sa limite.

292. *Théorême.* La surface d'un sphéroïde produit par la révolution d'un polygone régulier $ABCDG$, sur son axe AG, est égale au produit de l'axe par la circonférence d'un grand cercle de la sphère inscrite. Fig. 128.

Car la surface totale sera composée de la somme des zones décrites par les côtés AB, BC, CD, etc. Or, la surface de chaque zone est égale au produit de la partie correspondante de l'axe par la circonférence du cercle qui a OR pour rayon.

Par le milieu de BC, je fais passer un plan PR parallèle aux deux bases de la zone engendrée par BC, laquelle sera un cône tronqué; sa surface sera donc égale au produit de BC par la circonférence qui a PR pour rayon (*Coroll. précéd.*) $= BC \times$ cir. PR. Mais les triangles CBX, RPO sont semblables; car ils ont un angle droit chacun, et l'angle $CBX = PRO$, parce que les côtés de l'un sont perpendiculaires sur les côtés de l'autre; donc on a la proportion $CB : RO :: BX : PR$; mais à la place du rapport $RO : RP$, on peut

substituer celui des circonférences dont RO, RP sont les rayons; donc on aura CB : cir. RO :: BX : cir. PR, ou $CB \times$ cir. $PR = BX \times$ cir. RO. Or, le premier membre de cette équation est l'expression de la surface du cône tronqué, et le second est le produit de la partie correspondante de l'axe par la circonférence d'un grand cercle de la sphère inscrite; donc la surface de toutes les zones, c'est-à-dire, la surface du sphéroïde sera égale au produit de l'axe entier par la circonférence de la sphère inscrite.

293. *Scholie.* Si le polygone qui produit le sphéroïde est d'un nombre de côtés pairs, et que l'axe AG passe par deux angles opposés; cet axe sera le diamètre du cercle circonscrit.

Si l'axe passoit par le milieu des deux côtés opposés, il seroit le diamètre du cercle inscrit; dans
Fig. 125. ce cas pour avoir la surface totale du sphéroïde produit par la révolution du polygone tournant sur le diamètre du cercle inscrit, au produit de ce diamètre par la circonférence d'un grand cercle de la sphère inscrite, il faudroit ajouter les deux cercles produits par les côtés MA, NB.

294. *Théorême.* La surface de la sphère est égale au produit de son axe ou diamètre par la circonférence d'un de ses grands cercles.

Fig. 128. Car si l'on inscrit et circonscrit un polygone à un même cercle, et qu'on les fasse tourner ensemble sur le même axe, la surface du sphéroïde inscrit $abcdg$ sera plus petite que celle du sphéroïde circonscrit $ABCDG$; mais plus on augmentera le nombre des côtés des polygones, plus ils approcheront du cercle, et plus la différence entre les surfaces décrites deviendra petite. Or, on peut concevoir le nombre des côtés augmenté au-delà

de tout nombre assignable ; donc la différence entre les surfaces peut être zéro ; et par conséquent la limite du rapport entre les surfaces des sphéroïdes inscrits et circonscrits à la sphère, sera un rapport d'égalité ; mais la sphère est la limite des sphéroïdes inscrits et circonscrits ; donc pour avoir la surface de la sphère, il suffit de savoir ce que devient la surface des sphéroïdes inscrits et circonscrits à leur limite. Or, à la limite, le rayon *QR* devient le rayon de la sphère *OY*, et l'axe *AF* devient le diamètre de la shpère ; donc la surface de la sphère est égale au produit de son axe par la circonférence d'un de ses grands cercles.

295. *Corollaire premier.* La surface de la sphère égale quatre fois celle d'un de ses grands cercles ; car celle d'un de ses grands cercles se mesure en multipliant la circonférence par la moitié du rayon, ou le quart du diamètre, et celle de la sphère en multipliant la même circonférence par le diamètre.

296. *Corollaire deuxième.* La surface de la sphère est égale à la surface convexe du cylindre qui lui est circonscrit. Fig. 146.

Car la hauteur *AB* du cylindre est égale au diamètre de la sphère ; la circonférence de la base du cylindre est la même que celle d'un grand cercle de la sphère ; donc les deux surfaces s'estiment par les mêmes facteurs ; donc elles sont égales.

297. *Corollaire troisième.* La surface de la sphère est à celle du cylindre circonscrit, en y comprenant les bases, comme 2 : 3.

Car la surface de la sphère égale quatre fois celle d'un grand cercle ; mais la surface convexe du cylindre circonscrit égale aussi quatre fois celle d'un grand cercle ; donc si on y ajoute les deux bases qui valent deux grands cercles, la surface totale du

cylindre sera égale à six grands cercles : les deux surfaces de la sphère et du cylindre, seront donc entr'elles :: 4 : 6, ou :: 2 : 3.

298. *Corollaire quatrième.* La surface d'une zone sphérique quelconque est égale à la hauteur de cette zone multipliée par la circonférence d'un grand cercle.

Fig. 128. Car chaque zone sphérique est la limite de la zone polygonale qui lui est inscrite et circonscrite ; donc ce que nous avons dit de la tranche *MBYCO* est également vrai de toutes les autres.

299. *Définition.* Si on divise la circonférence d'un grand cercle de la sphère *a b c d f* en un certain nombre de parties égales, et si par les points

Fig. 127. de division *a*, *b*, *c*, et par l'axe de ce grand cercle, c'est-à-dire, par le diamètre qui lui est perpendiculaire, on fait passer des plans, la surface de la sphère sera divisée en un certain nombre de parties qu'on nomme fuseaux ; et les surfaces de ces fuseaux seront entr'elles comme les arcs du grand cercle compris entre les plans qui les forment. Chaque fuseau en particulier sera donc égal au produit du diamètre de la sphère par l'arc du grand cercle compris entre les plans.

Car on a la proportionnalité, le premier fuseau : *ab* :: le 2ᵉ : *bc* :: le 3ᵉ : *cd* :: le 4ᵉ : *df*....... ; donc la somme de tous est à la circonférence entière du grand cercle :: le premier est à *ab* ; mais la somme de tous égale la surface de la sphère $= AB \times$ cir. d'un grand cercle ; donc la surface d'un seul égalera le produit de $AB \times$ arc. *a b*.

Les deux extrémités *AB* de l'axe du grand cercle *a b c d*, sont appelés les poles du grand cercle, et il est visible que les deux poles sont également éloignés de tous les points de la circonférence ; car

A C étant perpendiculaire au plan *acg*, l'est à toutes les lignes qu'on peut mener dans ce plan au point *c* (257) ; donc tous les arcs *A a A b*.... mesurent des angles droits, et sont par conséquent égaux ; d'où il suit que si deux grands cercles *A a B m*, *a b c g* se coupent à angles droits, chacun passera par les poles de l'autre ; donc tous les arcs *A a*, *A b*, *A c* perpendiculaires sur un autre arc *abcd*, vont tous se réunir au pole de ce dernier, et réciproquement un arc *abcd*.... qui coupe à 90^d de distance plusieurs arcs *A a*, *A b*...... les coupe perpendiculairement, puisque tous ces cercles passent par ses poles.

L'angle que font entr'eux les deux plans qui forment le fuseau *A a B b A* sera mesuré par l'arc de grand cercle *a b* compris entre ces plans, et pris sur le cercle perpendiculaire à l'axe à la distance de 90^d des points d'intersection des deux demi-cercles qui forment le fuseau ; car l'angle que font entr'eux les deux plans est égal à celui que font entr'elles deux lignes menées perpendiculairement au même point de la commune section des deux plans. Or, la commune section est l'axe *AB*, et les rayons *c a* menés du centre à la circonférence à 90^d de distance du sommet de l'axe sont perpendiculaires à cet axe ; donc l'angle qu'ils font entr'eux mesure l'inclinaison des deux plans.

Si vous coupez un fuseau de la sphère *AB'BCA* Fig. 141. par un plan *B'CM*, dont la direction passe par le centre de la sphère, ce plan tracera sur la surface de la sphère un arc du grand cercle, et la partie de la surface interceptée entre cet arc *B'C*, et les deux segmens des fuseaux *AB'*, *AC*, sera un triangle sphérique ; et puisque les trois plans passent par le centre, ils y formeront un angle solide formé par la réunion des trois angles plans *AOC*, *B'OC*,

AOB'. Chacun de ces angles étant au centre de la sphère, sera mesuré par le côté correspondant du triangle sphérique ABC formé sur la surface de la sphère.

Les angles $B'AC$, $AB'C$, $B'CA$ du triangle sphérique sont les mêmes que ceux que font entr'eux les plans qui forment les fuseaux $BB'AC$, $MCB'AS$, $CB'NA$; car les deux arcs AC, AB', ont au point de rencontre A, la même direction que leurs tangentes Ab, Ac. Or, les deux tangentes Ab, Ac sont chacune dans le plan de leur arc, et perpendiculaires au rayon OA, commun aux deux grands cercles $B'A$, CA; donc l'angle bAc sera le même que celui que font entr'eux les deux plans qui forment le fuseau $B'ACBB'$.... Il sera donc mesuré par l'arc de grand cercle compris entre les plans à la distance de 90^d du sommet de l'angle.

On peut former sur la surface de la sphère des polygones sphériques d'autant de côtés que l'on voudra, en joignant sur la surface plusieurs arcs de grand cercle, dont les plans vont tous se réunir au centre de la sphère.

300. *Théorême.* Etant donné le triangle sphérique ABC, si on prolonge les côtés AB, AC, BC jusqu'à 90^d de part et d'autre des points A, B, C, de manière que les six arcs ACH, ABC;
Fig. 163. BAK, BCI, CAL et CBM soient des quarts de cercle, et que par les extrémités de ces arcs, on tire les arcs FE, ED, DF, ces trois derniers formeront le triangle DFE, dont les trois angles seront les poles des côtés du premier triangle, et réciproquement les angles du premier seront les poles du côté du second.

Car, 1°. puisque les arcs ACH, ABC sont des quarts de cercle, le point A est à 90^d de dis-

tance de tous les points de l'arc EF. On en dira autant des points B et C, par rapport aux arcs FD, DE; donc les angles A, B, C sont les poles des arcs FE, FD, DE; 2°. le point E appartenant à l'arc FE, est éloigné de 90^d du point A : le même point E appartenant à l'arc DE est éloigné de 90^d du point C; donc il est le pole du côté AC. Le point E est pareillement le pole de l'arc BA, et le point D, celui de l'arc BC.

301. *Théorême.* Les côtés FE, FD, DE du triangle FDE, sont les supplémens des angles A, B, C.

Car l'on a $FG = 90^d$, $EH = 90^d$; donc $FG + EH$, ou $FE + GH = 180^d$; or GH est la mesure de l'angle A; donc, etc.

Le triangle DEF est appelé pour cette raison triangle supplémentaire, et les deux triangles DEF, ABC, sont appelés triangles polaires.

302. *Théorême.* Dans tout triangle sphérique $AB'C$, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.

Car les trois côtés AB', AC, $B'C$, mesurent chacun un des trois angles plans qui forment l'angle solide O; or chacun des trois angles plans, qui composent l'angle solide, est moindre que la somme des deux autres; donc un côté quelconque du triangle ABC est moindre que la somme des deux autres. Fig. 141.

303. *Théorême.* La somme des trois côtés qui forment un triangle sphérique, est moindre que 360^d.

Car la somme des trois côtés qui forment un triangle sphérique, est la même que celle des trois angles plans, qui forment au centre l'angle solide; or tout angle solide est moindre que 360^d (270); donc, etc.

304. *Corollaire.* La somme de tous les côtés qui forment un polygone sphérique, est toujours

Fig. 138. moindre que 360^d; car quelle que soit le nombre des angles plans qui forment un angle solide, leur somme est moindre que 360^d.

305. *Théorême.* Dans tout triangle sphérique, la somme des trois angles est moindre que six angles droits, ou 540^d.

Car la somme des trois angles sphériques est la même que celle des trois angles qui font entr'eux, par leur inclinaison mutuelle, les trois plans qui se réunissent au centre ; or un plan qui en rencontre un autre, ne peut pas faire avec lui un angle de 180^d ; car les deux ne feroient qu'un seul et même plan prolongé ; donc la somme des angles d'inclinaison ne peut pas être six angles droits ; donc, etc.

306. *Théorême.* La somme des trois angles d'un triangle sphérique ABC, est toujours plus grande que deux angles droits ou 180^d.

Fig. 165. Car chaque angle du triangle A, avec le côté correspondant FE, du triangle supplémentaire, vaut 180^d ; donc la somme des trois angles ABC, ajoutée à celle des trois côtés $FE, FD, DE =$ six angles droits (301) ; or, celle des trois côtés FE, FD, DE, est $<$ quatre angles droits ; donc celle des trois angles A, B, C sera plus grande que deux angles droits, ou 180^d.

307. *Scholie.* Les deux limites de la somme des trois angles d'un triangle sphérique, sont six angles droits et deux angles droits ; d'où il suit que deux angles d'un triangle sphérique étant connus, on ne peut en conclure le troisième comme dans la trigonométrie rectiligne.

308. *Théorême.* Si deux grands cercles $AB'BM$, $ACBN$, qui se coupent aux points A, B, sont coupés par un troisième grand cercle $B'CMN$, la

somme des triangles opposés $BB'C, BNM$, sera égale au fuseau $ABBC$. Fig. 141.

Car le triangle sphérique $AB'C$, est égal au triangle sphérique NBM. En effet, $AB' + B'B = B'B + BM$; puisque l'un et l'autre égale une demi-circonférence de grand cercle; donc $AB' = BM$; $AC + CB = CB + BN$; donc $AC = BN$; $B'C + CM = CM + MN$; donc $B'C = MN$. Il est encore évident que l'angle $BA'C = MBN$; donc les deux triangles sphériques BAC, MBN ont les trois côtés égaux et semblablement disposés; donc il sont égaux.

309. *Théorême.* La surface d'un triangle sphérique quelconque a pour mesure le produit de l'axe de la sphère, multiplié par la somme des trois arcs de grand cercle qui mesurent ses angles, moins la demi-circonférence.

Car, soit $AB'C$ le triangle sphérique proposé, prolongez ses côtés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau en B, N, M, dans l'hémisphère opposé, il est visible que la surface de la moitié de la sphère, sera représentée par les fuseaux $AB'BCA + B'CMSA + CBNM - 2AB'C$; donc $2AB'C =$ la surface des trois fuseaux, moins celle de la demi-sphère; mais la surface de chaque fuseau $=$ l'axe multiplié par l'arc qui mesure l'angle, et celle de la demi-sphère $=$ l'axe par la moitié d'un grand cercle; donc si l'on représente par A, B, C les trois arcs qui mesurent les trois angles sphériques, par $\frac{P}{2}$ la demi-circonférence et par R le rayon, on aura $ABC = R\left(A + B + C - \frac{P}{2}\right)$. Fig. 141.

310. *Scholie.* On prend ordinairement le rayon de la sphère pour l'unité, et l'angle droit pour le terme de comparaison dans les arcs ou les angles; pour lors la surface de la sphère est représentée par deux circonférences ou huit angles droits. Cette comparaison d'une surface à un angle, ne présente aucune difficulté, si l'on considère que la surface doit être divisée par le quarré du rayon pris pour unité, et que l'angle est l'arc compris entre ses côtés divisé par le rayon; la surface et l'arc deviennent aussi des nombres abstraits, et par conséquent comparables. On dira donc que la surface d'un triangle sphérique est égale à l'excès de la somme de ses trois angles sur deux angles droits, ou $ABC = A + B + C - 2$, l'angle droit étant pris pour unité, et par conséquent la surface de la sphère étant représentée par huit.

Ainsi autant il y aura d'unités dans la mesure précédente, autant le triangle sphérique contiendra de huitièmes parties de la sphère, qui sont ici l'unité de surface.

Supposons que le triangle sphérique proposé ait ses trois angles droits, sa surface sera $3 - 2 = 1$, ou égale à la huitième partie de la sphère, ce qui est évident. On nomme cette surface triangle-trirectangle, parce qu'elle est la base d'une pyramide sphérique formée par trois plans qui se coupent au centre à un angle droit.

311. *Théorème.* La surface d'un polygone sphérique qui n'a point d'angles rentrans, est égale à l'excès de la somme de ses angles intérieurs, sur autant de fois deux angles droits, que le polygone a de côtés moins deux.

Fig. 183. De l'angle A soient menées à tous les autres angles les diagonales AD, AC.... le polygone $ABCDE$, sera partagé en autant de triangles

sphériques, qu'il y a de côtés moins deux; mais la surface de chaque triangle est égale à la somme de ses angles, moins deux angles droits; et il est visible que la somme de tous les angles des triangles, est égale à la somme des triangles intérieurs du polygone; donc la surface du polygone sera égale à la somme de ses angles, moins autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés dans le polygone moins deux.

ARTICLE II.

De la mesure des solides.

312. La solidité d'un corps est la partie de l'espace comprise entre les faces qui le terminent.

Mesurer un solide, c'est le comparer à un autre solide d'une capacité connue, pour savoir combien de fois il le contient. La mesure des solidités, comme celle des surfaces, suppose leur comparaison.

313. *Théorême.* Deux prismes sont égaux, lorsqu'ils ont un angle solide compris entre trois plans égaux chacun à chacun, et semblablement disposés.

Soit la base $ABCDE = abcde$, le plan $ABGF = abgf$, et $BCHG = bchg$. Je dis que le prisme $ABCI = abci$. Fig. 121.

Soit posée la base $ABCDE$ sur $abcde$: elles coïncideront, puisqu'elles sont égales; mais les trois angles plans qui forment l'angle solide B, sont égaux aux trois angles plans qui forment l'angle solide b chacun à chacun, et ils sont semblablement placés par la supposition; donc l'arête bg tombera sur son égale BG; mais $AF = BG$, et

$af = bg$, et de plus $ba = BA$; donc af tombera sur AF, et ch sur CH; donc la position de la base $ghikf$ sera déterminée par celle des trois points F, G, H; donc les deux bases supérieures coïncideront comme les inférieures, et les deux solides seront confondus en un seul.

314. *Scholie premier.* Un prisme est déterminé, lorsqu'on connoît sa base, la longueur, et la position d'une de ses arêtes; car les autres arêtes doivent lui être égales et parallèles; donc la position de la base sera déterminée.

Scholie deuxième. On démontre par le principe de la superposition l'égalité de deux prismes qui ont un angle solide égal compris entre trois plans égaux et semblablement disposés. Mais si les plans qui forment l'angle solide étoient disposés en sens inverse, les deux solides n'en seroient pas moins égaux, pourvu que les parties constituantes de l'un; savoir, les angles, les côtés, et l'inclinaison des plans, fussent égales aux parties homologues de l'autre.

On nomme de pareils solides *symétriques*, et il est visible que deux polyèdres symétriques sont égaux, quoiqu'ils ne puissent être superposés; car il n'y a d'autre différence dans les deux solides que celle de la position des parties. (*Voyez la Géom. de Legendre, liv. 6.*)

315. *Théorème.* Deux rhomboïdes rectangles de même base et de même hauteur sont égaux en solidité.

Fig. 154, 155. Car si la base est égale dans les deux solides, et la hauteur la même, les faces latérales seront aussi égales, et il y en aura le même nombre; donc les deux rhomboïdes auront un angle solide égal compris entre trois plans égaux chacun à chacun (314); donc ils seront égaux en solidité.

316.

316. *Théorème.* Deux rhomboïdes rectangles AG, AL qui ont une même base $ABCD$, ou des bases égales, sont entr'eux comme leurs hauteurs AE, AI. Fig. 154.

Supposons premièrement que les hauteurs sont commensurables entr'elles, et qu'elles sont dans le rapport de $M : N$, par exemple de 12 : 8...... Si nous partageons la hauteur AE en 12 parties égales, et que par les points de division, nous fassions passer des plans parallèles à la base, nous diviserons le rhomboïde en douze tranches égales en solidité, puisqu'elles auront même base et même hauteur. Or, le solide AG contiendra les douze tranches, et le solide AL en contiendra 8; donc les deux rhomboïdes seront entr'eux comme les hauteurs. 2°. Supposons que le rapport de $AE : AI$ soit incommensurable. Soit prise d'abord une partie commensurable AM, menons le plan MN parallèle aux bases, nous aurons la proportion sol. AH : sol. AN :: AE : AM. Portons le reste IM sur AI, autant de fois qu'il y est contenu. La partie commensurable sera AR avec un reste $RI < IM$; on aura donc la proportion sol. AH: sol. AR :: AE : AR. Mais les antécédens de la seconde proportion sont les mêmes que ceux de la première; donc le rapport des parties commensurables reste toujours le même, il sera donc celui de leur limite; mais cette limite est AI; car c'est le terme dont on approche continuellement en prenant toujours pour unité de mesure la partie restante de AI; donc on aura sol. AH : sol. AL :: AE : AI.

317. *Théorême.* Deux rhomboïdes rectangles BQ, AK de même hauteur AE, sont entr'eux comme leurs bases $BOPC$, $AMNO$.

Fig. 185. Soit pris un troisième rhomboïde AQ de même hauteur AE, que les deux qu'on veut comparer entr'eux, ayant une face latérale $OPQL$ de commune avec le rhomboïde BQ, et une autre face latérale $AOLE$ de commune avec le rhomboïde AK. Cela posé,

Les deux rhomboïdes BQ, AQ ayant même base, sont entr'eux comme leur troisième dimension (316) ; il en sera de même des rhomboïdes AQ, AK : on aura donc les deux proportions :

$$\text{sol. } BQ : \text{sol. } AQ :: OB : OA$$
$$\text{sol. } AQ : \text{sol. } AK :: OP : AM.$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, on aura,

$$\text{sol. } BQ : \text{sol. } AK :: OB \times OP : OA \times AM.$$

Mais $OB \times OP$ représente la base du premier rhomboïde, et $OA \times AM$ représente la base du second ; donc les deux rhomboïdes rectangles de même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases.

318. *Scholie.* On peut prendre pour base des rhomboïdes rectangles, telle face du solide qu'on voudra ; ainsi les théorêmes déjà démontrés se réduisent aux propositions suivantes,

1°. Deux rhomboïdes rectangles, qui ont les trois dimensions égales, sont égaux en solidité.

2°. Deux rhomboïdes rectangles, qui ont deux dimensions égales, sont entr'eux comme leur dimension inégale.

3°. Deux rhomboïdes rectangles, qui ont une dimension égale, sont entr'eux comme le produit des deux dimensions inégales.

319. *Théorême.* Deux rhomboïdes rectangles dont les trois dimensions sont inégales, sont entr'eux comme le produit de leurs trois dimensions.

Soient les deux solides AG, RL dont les trois dimensions sont inégales, la figure étant construite comme dans le théorême précédent, donnons au solide AK une base IL égale à celle du rhomboïde RL: on aura donc les trois proportions: Fig. 135.

$$\text{sol. } BQ : \text{sol. } AQ :: OB : AO$$
$$\text{sol. } AQ : \text{sol. } AK :: AD : AM$$
$$\text{sol. } AK : \text{sol. } RL :: AE : ET.$$

Si on multiplie par ordre les trois proportions, on aura,

$$\text{sol. } BQ : \text{sol. } RL :: OB \times AD \times AE : AO \times AM \times ET.$$

320 *Scholie.* Si on suppose que le solide RL ait ses trois dimensions égales, il représentera un cube; et si on prend les dimensions de ce cube pour les unités linéaires, le cube lui-même sera l'unité de comparaison pour les solides, et l'on aura $\text{sol. } BQ = \text{cub. } RL\left(\frac{OB \times AD \times AE}{1^3}\right)$; donc la solidité d'un rhomboïde rectangle est égale au cube pris pour unité de mesure répétée autant de fois que le nombre abstrait $\frac{OB \times AD \times AE}{1^3}$ contient d'unités. On sousentend ordinairement dans le produit le facteur cube, et l'on donne au nombre abstrait le nom d'unités cubes, ce qui revient au même dans la pratique. Telle est la manière d'estimer la solidité d'un rhomboïde rectangle droit, c'est-à-dire, dont les arêtes sont perpendiculaires sur la base.

321. (h) *Théorême.* La solidité d'un prisme droit dont la base n'est pas un rectangle, est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Car quelle que soit la base rhombe, triangulaire, Fig. 136.

polygonale, etc. on pourra concevoir le prisme partagé en un grand nombre de tranches, ayant toutes même hauteur et même épaisseur $A\,a$. Chaque tranche pourra être partagée en autant de prismes rectangulaires qu'on pourra concevoir de petits rectangles dans sa base $A\,a\,b\,B$. Soit donc la base un polygone quelconque, par exemple, un triangle $A\,B\,C$ partagé en autant de trapèzes $AcdB$, qu'on suppose de tranches dans le solide. Inscrivons et circonscrivons à chaque trapèze un rectangle $c\,d\,n\,m$, $A\,a\,b\,B$, chaque rectangle circonscrit est plus grand que le trapèze correspondant, et chaque rectangle inscrit est plus petit. Nous nommerons les premiers rectangles excédans, et les seconds, rectangles déficiens. La somme des tranches ayant pour base les rectangles excédans, formera un prisme excédant, et la somme de celles ayant pour base les rectangles déficiens, formera un prisme déficient.

Il est visible que la solidité du prisme excédant est égale à la somme des rectangles excédans, formant la base $A\,B\,C$ multipliés par la hauteur, et celle des prismes déficiens est égale à la somme des rectangles déficiens de la base par la même hauteur; mais la surface des rectangles excédans surpasse celle des rectangles déficiens de tout le rectangle $B\,A\,a\,b$ (288); donc le prisme excédant surpasse le prisme déficient de toute la tranche qui a pour base $a\,b\,B\,A$. Plus la hauteur des rectangles, ou épaisseur des tranches $A\,a$ diminuera, plus la différence entre les prismes excédans et déficiens deviendra petite. Or, cette épaisseur peut devenir moindre que toute quantité assignable; donc la différence des prismes excédans aux prismes déficiens peut être zéro, et pour lors la solidité du prisme excédant sera égale à celle du prisme défi-

cient; mais à la limite les bases du prisme excédant et déficient sont égales au triangle ABC, et les deux prismes sont égaux au prisme triangulaire; ou, ce qui est la même chose, le dernier rapport entre les trois solides est un rapport d'égalité; donc la solidité du prisme proposé est égale au produit de sa base par sa hauteur.

322. *Théorême.* La solidité d'un prisme oblique est égale à celle d'un prisme droit, de même base et de même hauteur.

Soient ces deux prismes, l'un droit AB, et l'autre oblique MP, dont les bases sont un polygone quelconque $MPQR$, et dont le profil est représenté par la figure (φ). Supposons qu'ils soient coupés par des plans parallèles en un égal nombre de tranches ayant même épaisseur ab; en tirant des plans perpendiculaires par les profils CM, ba, gf, dp, on formera des tranches excédantes $fpMcg$, et des tranches déficientes $fpabg$, et il est visible que la tranche dont $CMpd$ est la base est égale à la tranche correspondante du prisme droit $BCDF$; donc chaque tranche excédante surpasse la tranche correspondante du prisme droit, d'un petit prisme dont $pfgd$ est la base; et chaque tranche déficiente est plus petite que la tranche correspondante du prisme, de la même quantité; donc la somme des tranches excédantes, ou le prisme excédant égale le prisme droit AB, plus une partie de la tranche inférieure dont $MPQR$ est la base, et CM la hauteur, et le prisme déficient égale le prisme droit, moins la même partie de la tranche. Fig. 137.

Plus la hauteur des tranches diminuera, plus la différence des prismes excedans et déficiens au prisme droit deviendra petite; mais on peut concevoir la hauteur de la tranche plus petite que toute grandeur assignable; donc à la limite la différence

des prismes sera zéro, c'est-à-dire, que les prismes excédans, déficiens et droits seront égaux; mais à cette même limite, les deux prismes excédans et déficiens sont égaux au prisme oblique; donc le prisme oblique est égal au prisme droit de même base et de même hauteur.

323. *Corollaire.* Quelle que soit la base d'un prisme, quelle que soit sa hauteur, qu'il soit perpendiculaire ou oblique sur sa base, la solidité s'estimera dans tous les cas par le produit de ses trois dimensions.

324. *Théorême.* La solidité du cylindre est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Fig. 123. Car la solidité d'un prisme polygonal inscrit au cylindre est égale au produit de la base par la hauteur. Plus le polygone de la base aura de côtés, plus il approchera du cercle, et plus le prisme approchera du cylindre, sans jamais se confondre avec lui; mais il peut n'en différer que d'une quantité moindre que toute grandeur donnée (278 et 119). Le cylindre est donc la limite des prismes qu'on peut lui inscrire et circonscrire. Mais à la limite le polygone de la base devient cercle; donc pour avoir l'expression de la limite des solides des prismes inscrits et circonscrits, il faut substituer le cercle au polygone de la base; donc, etc.

325. *Lemme.* Si une pyramide $MABCDEG$ est coupée par un plan $abcdeg$ parallèle à la base,

1°. Les côtés MA, MB, MC.... et la hauteur MO seront coupées proportionnellement en
Fig. 118. a, b, c.

2°. La section $abceg$ sera un polygone semblable à la base $ABCDEG$.

1°. Si l'on conçoit un plan quelconque, passant

par le sommet M, parallèle à la base de la pyramide, les côtés de la pyramide MA, MB, et la hauteur MO seront des lignes droites comprises entre deux plans parallèles, et coupées par un troisième plan parallèle ; donc elles seront coupées en parties proportionnelles (265).

2°. Les côtés AB, ab.... BC, bc sont parallèles ; car ils sont deux à deux sur le même plan AMB, BMC, s'ils n'étoient pas parallèles prolongés, ils se rencontreroient ; donc les plans $ABCD$.... $abcd$ ne seroient pas parallèles, ce qui est contre la supposition ; donc l'angle $ABC = abc$ (103) (1). On démontrera de la même manière l'égalité des angles C, c.... D, d.... E, e. De plus les triangles semblables MAB, Mab, MBC, Mbc.... donnent les proportions,

$$AB : ab :: MB : Mb$$
$$MB : Mb :: BC : bc.$$

Donc $AB : ab :: BC : bc$; il en est de même des autres côtés ; donc les deux polygones ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels ; donc ils sont semblables.

326. *Théorême* Si deux pyramides $SABC$, $SA'B'C'$ qui ont même hauteur, sont coupées par un même plan parallèle à leurs bases, les deux

---

(1) Pour conclure l'égalité des angles ABC, abc du parallélisme des côtés AB, ab, BC, bc, il est nécessaire qu'ils soient tous les quatre dans un même plan ; mais il est facile de concevoir le polygone $abcdf$ inscrit dans le polygone $ABCDF$; les côtés homologues restant parallèles, en abaissant des perpendiculaires des points a, b, c... sur la base de la pyramide, joignant ensuite les extrémités de ces perpendiculaires par des lignes droites ; ces lignes seront les côtés du polygone inscrit parallèle à $ABCD$.... et égal à $abcd$.

Fig. 145. sections $abc, a'b'c'$, faites dans les deux pyramides, sont entr'elles comme les bases des pyramides.

La section abc est un polygone semblable à la base ABC (*lemme*); donc les deux surfaces sont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues, on a donc la proportion $abc : ABC :: \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$; mais $\overline{ab}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{sa}^2 : \overline{SA}^2$; donc $abc : ABC :: \overline{sa}^2 : \overline{SA}^2$.

La section $a'b'c'$ est encore un polygone semblable à la base $A'B'C'$; donc on a $a'b'c' : A'B'C' :: \overline{sa'}^2 : \overline{SA'}^2$; mais à cause des triangles semblables saa', SAA', on a $\overline{sa'}^2 : \overline{SA'}^2 :: \overline{sa}^2 : \overline{SA}^2$, d'où on conclut $abc : a'b'c' :: ABC : A'B'C'$.

327. *Théorême.* Deux pyramides quelconques de même hauteur, sont entr'elles comme leurs bases.

Fig. 143, 144. Car soient les deux pyramides $SABCDE$, $SABC$, dont les hauteurs SF, Sf soient égales, supposons les deux pyramides partagées en un égal nombre de tranches de même hauteur ou épaisseur, par des plans parallèles à la base. Considérons dans chaque tranche deux prismes, l'un excédant $ABCLG$, ou $abclg$, ayant pour base la base inférieure de la tranche, et l'autre déficient $AFHMND$, ou $afhmnd$, ayant pour base la base supérieure de la tranche. Cela posé,

Chaque prisme excédant ou déficient d'une pyramide est à son correspondant de même nom dans l'autre pyramide, comme la base de la première pyramide est à la base de la seconde; donc la somme des prismes excédans ou déficiens dans l'une, est à la somme des prismes de même nom dans l'autre,

comme la base de la première est à la base de la seconde.

La différence entre la somme des prismes excédans et celle des prismes déficiens, sera égale au prisme excédant, ayant pour base la base de la pyramide, et pour hauteur la hauteur de la tranche (1); donc plus on augmentera le nombre des tranches, plus cette différence deviendra petite; or le nombre des tranches peut augmenter au-delà de tout nombre assignable, en diminuant dans le même rapport l'épaisseur des tranches; donc la différence entre la somme des prismes excédans et déficiens peut être moindre que toute grandeur donnée; c'est-à-dire qu'à la limite, les deux sommes sont égales entr'elles, et à la solidité de la pyramide, qui est toujours entre les deux. Mais la propriété démontrée a lieu, quelque petite que soit l'épaisseur des tranches; donc elle aura encore lieu à la limite, donc les pyramides de même hauteur sont entr'elles comme leurs bases.

328. *Scholie.* Si l'on connoît la solidité d'une pyramide, on connoîtra celle de toutes les pyramides de même hauteur.

On peut concevoir un cube comme formé par la réunion de six pyramides égales, qui toutes ont leur sommet au centre du cube, et qui ont chacune pour base une de ses faces. La hauteur de ces pyramides sera donc égale à la moitié de la hauteur du

---

(1) Il est aisé de voir que la différence de la somme des prismes excédans et déficiens est égale au prisme excédant, ayant pour base *A B C...* en remarquant que le second prisme excédant est égal au premier déficient, le troisième excédant au deuxième déficient, et ainsi des autres, et que le dernier déficient est zéro.

cube : la solidité de chacune sera la sixième partie de celle du cube. Or celle du cube peut être exprimée par le produit de la base, multiplié par la hauteur ; donc celle de la pyramide sera égale au produit de sa base, par le sixième de la hauteur du cube, ou le tiers de sa hauteur.

329. (i) *Théorême.* La solidité d'une pyramide droite, est égale au produit de sa base multipliée par le tiers de sa hauteur.

Car on peut toujours imaginer un cube d'une hauteur double de celle de la pyramide qu'on veut évaluer. Une pyramide qui auroit pour base une des faces du cube, et pour hauteur la moitié de celle du cube, seroit égale au produit de sa base par le tiers de la hauteur ; et son expression seroit $\frac{1}{3} H.B$, en appellant H la hauteur et B la base, et la solidité de la pyramide qu'on veut évaluer sera à celle-ci, comme la base de la première est à la base de la seconde ; donc si b représente la base de la première, on aura la proportion sol. $p : \frac{1}{3} H.B :: b : B$, et par conséquent sol. $p = \frac{1}{3} H.B$. C'est-à-dire que la solidité d'une pyramide quelconque droite, est égale au produit de la base par un tiers de sa hauteur.

Fig. 143. 330. *Théorême.* Une pyramide droite et une pyramide oblique de même base et de même hauteur, sont égales en solidité.

Car si l'on coupe les deux pyramides par des plans parallèles aux bases, et si l'on forme dans chaque pyramide une tranche excédante, $BGCL$, $B'C'L'G'$, et une tranche déficiente $DFHM$, $D'F'H'M'$, on verra que chaque tranche excédante de la pyramide droite, est égale à la tranche correspondante de la pyramide oblique, puisqu'elles ont mêmes bases et mêmes hauteurs. Mais à la limite les deux

tranches excédantes et pyramidales sont égales dans chaque pyramide; donc à la limite, chaque tranche de la pyramide oblique, est égale à la tranche correspondante de la pyramide droite; d'ailleurs le nombre des tranches est le même dans les deux pyramides, puisqu'elles ont même hauteur; donc.... etc.

331. *Théorême.* La solidité du cône est égale au produit de sa base par le tiers de sa hauteur;

Car le cône est la limite des pyramides qu'on peut lui inscrire et circonscrire; donc pour avoir la solidité du cône, il faut dans l'expression de celle de la pyramide, substituer la base circulaire à la base polygonale; donc la solidité du cône est égale au produit de sa base par le tiers de sa hauteur. Fig. 124.

332. (k). *Théorême.* La solidité d'un tronc de pyramide coupée par un plan parallèle à la base, est égale à la somme de trois pyramides qui auroient pour hauteur commune la hauteur du tronc, et dont les bases seroient la base inférieure du tronc, la base supérieure, et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

Quel que soit le polygone de la base de la pyramide $ABCDE$, on peut toujours le réduire en un triangle qui lui est égal en surface (232); donc quelle que soit la pyramide, on pourra la réduire en une pyramide triangulaire $SABC$ de même hauteur, et qui lui sera égale en solidité. Si on coupe les deux pyramides par un plan parallèle aux bases, les sections seront entr'elles comme les bases (325), et par conséquent égales entr'elles. De-là il suit que les deux pyramides $Sabcde$, $Sabc$, sont égales en solidité; et puisque les pyramides entières sont égales en solidité, les troncs $ABCDE\,abcde$, $ABCabc$ sont aussi égaux, et par conséquent Fig. 144. Fig. 145.

il suffira de démontrer la proposition énoncée pour le seul cas du tronc de pyramide triangulaire.

Fig. 145. Soit donc $FGHfgh$ un tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles, par les trois points FgH; conduisez le plan FgH, qui retranchera du tronc la pyramide triangulaire $gFGH$, cette pyramide a pour base la base inférieure FGH du tronc, et pour hauteur, la hauteur même du tronc, puisque le sommet g est dans le plan de la base supérieure.

Après avoir retranché cette pyramide, il restera la pyramide quadrangulaire dont le sommet est g, et dont la base est le trapèze $fhHF$. Par les trois points ghF, conduisez un plan qui retranchera de la pyramide quadrangulaire, la pyramide triangulaire $ghfF$; cette pyramide a pour base la base supérieure du tronc fgh, et pour hauteur la hauteur même du tronc, puisque le sommet F est dans le plan de la base inférieure.

Mais on peut prendre aussi pour base de cette pyramide le triangle fhF, et pour sommet le point g, et pour lors la partie restante du tronc $ghFH$, sera une troisième pyramide, ayant son sommet au point g, et pour base le triangle hFH. Ces deux pyramides ayant même hauteur, sont entr'elles comme leurs bases; or les deux bases sont deux triangles ayant même hauteur, puisqu'ils sont formés dans le même trapèze par la diagonale Fh; donc la troisième pyramide est à la seconde :: FH : fh; par le même raisonnement on prouvera que la troisième est à la première :: $fh : FH$. Appelons donc la première p, la seconde Q, et la troisième R, on aura les deux proportions $p : R :: FH : fh$, et $Q : R :: fh : FH$; donc multipliant ces deux proportions, on a $p\,Q : R^2 :: 1 : 1$; donc

$pQ = R^2 \ldots$ or $p = \frac{H.B}{3}$ et $Q = \frac{H.b}{3}$; donc $R = \frac{H}{3} \sqrt{B.b}$; c'est-à-dire que la partie restante du tronc, est égale à une pyramide ayant même hauteur que le tronc, et pour base une moyenne proportionnelle aux bases supérieure et inférieure du tronc (1).

333. *Corollaire.* Un tronc de cône est égal en solidité à trois cônes, ayant tous les trois même hauteur que le tronc, et pour base, le premier, la base inférieure du tronc; le second, la base supérieure, et le troisième, une base moyenne proportionnelle entre les bases supérieure et inférieure.

334. *Théorême.* La solidité d'un polyèdre régulier est égale au produit de sa surface par le tiers de la perpendiculaire abaissée du centre du polyèdre, au centre d'une des faces de la base.

Car on peut regarder le polyèdre comme composé d'autant de pyramides égales, qui vont se réunir au centre du polyèdre, et dont chacune a pour base une des faces du polyèdre, et pour hauteur commune, la perpendiculaire abaissée du centre du Fig. 129, 130, 131.

---

(1) Si l'on eût commencé par retrancher du tronc pyramidal la pyramide ayant pour base la base supérieure, et ensuite la pyramide ayant pour base la base inférieure, la troisième pyramide auroit eu une base et une hauteur différentes; mais la solidité eût été la même, puisqu'elle est dans les deux cas égale au reste du tronc après en avoir ôté les deux premières pyramides. Il est visible que les deux bases sont comme les deux côtés parallèles du trapèze latéral du tronc, ou comme un côté FH de la base inférieure est à son homologue fh de la base supérieure, et les hauteurs des pyramides, comme gk et GK, hauteurs des bases supérieure et inférieure.

polyèdre au centre de la base (*Théorême suivant*); donc la solidité d'un polyèdre est égale à celle d'une seule pyramide, qui auroit pour base une surface égale à la somme des surfaces, et pour hauteur la perpendiculaire tirée du centre sur la base. Or une pareille pyramide seroit égale au produit de sa base, par le tiers de sa hauteur; donc, etc.

335. *Théorême.* Si du centre de chaque face du polyèdre, on élève une perpendiculaire, elles iront Fig. 141. se réunir au centre du polyèdre, et elles seront toutes égales entr'elles.

Soit tirée des deux centres des faces a, b, une ligne droite, qui sera perpendiculaire sur le milieu de l'arête commune MN; élevez aux points a, b, deux perpendiculaires au plan de la figure, elles seront dans un même plan perpendiculaire (261); pliez la face MNP sur l'arête MN, la ligne ab deviendra une ligne brisée, les deux perpendiculaires au plan de la figure resteront toujours dans le plan perpendiculaire à MN, et se couperont en un point O.

Supposez que le plan vertical devienne horizontal, et réciproquement, les deux perpendiculaires aux faces seront représentées par aO, bO, la ligne ab par la ligne brisée acb, l'arête MN par $M'N'$; or le triangle rectangle $cOb = cOa$, car $cb = ca$; cO est commun aux deux triangles, l'angle $b =$ l'angle a, donc $bO = aO$. Elevons une autre perpendiculaire au centre de RMS, et plions la figure sur MR, on prouvera par un raisonnement semblable, que cette perpendiculaire rencontrera Oc au point O, et qu'elle lui sera égale; car $ac' = ac$, l'angle $ac'O$ égalera acO; donc tous les triangles rectangles qu'on formera par les perpendiculaires au centre de chaque face, seront tous égaux, et par conséquent toutes les perpendiculaires, jus-

qu'à leur point de rencontre, telles que Ob, Oa, seront égales.

336. *Corollaire premier.* Les lignes $OM'ON'$, tirées du centre à tous les angles solides du polyèdre, seront égales, car $CM' = CN'$; donc elles sont également éloignées de la perpendiculaire tirée du centre sur l'arête; donc elles sont égales.

337. *Corollaire deuxième.* On pourra inscrire et circonscrire un polyèdre régulier à une sphère.

338. (1). *Scholie.* Si l'on inscrit un polyèdre régulier dans une sphère, les plans menés du centre, le long des différens côtés, partageront la surface de la sphère en autant de polygones sphériques égaux que le polyèdre a de faces, et chaque côté du polyèdre sera la corde qui soutend le côté correspondant du polygone sphérique.

Si l'on ne considère que des polygones finis, la sphère ne peut être recouverte avec des polygones égaux et réguliers, que de cinq manières; car chaque polygone sphérique correspond à un polygone plan, formé par les cordes qui soutendent les côtés du polygone sphérique; donc il ne peut y avoir un plus grand nombre de polyèdres sphériques, que de polyèdres réguliers inscrits.

Mais si l'on considère les polygones infiniment petits, on a encore trois manières de couvrir la sphère; savoir, avec des triangles équilatéraux, des quarrés et des hexagones. Ces polygones infiniment petits, peuvent être considérés comme des plans, et six angles d'un triangle équilatéral, quatre angles d'un quarré, et trois angles d'un hexagone, en se réunissant par leurs pointes, forment 360^d (153), qu'on peut regarder comme la limite des angles solides; et pour lors le nombre infini de petits polygones réguliers qui formeroient les polyè-

dres inscrits à la sphère, se confondent avec elle; on peut donc la regarder comme la limite des polyèdres inscrits et circonscrits. Ainsi plus l'angle solide des polyèdres approche de sa limite, plus le polyèdre inscrit et circonscrit approche de la sphère, sans jamais se confondre avec elle, quoiqu'il puisse n'en différer qu'aussi peu que l'on voudra.

339. *Théorème.* La solidité de la sphère est égale au produit de sa surface, par le tiers de son rayon.

Car la solidité d'un polyèdre inscrit à la sphère est égale au produit de sa surface, par le tiers de la perpendiculaire menée du centre du polyèdre au centre des faces. Or, en augmentant le nombre des faces, l'angle solide approche de sa limite, et le polyèdre de la sienne, qui est la sphère; donc pour avoir la solidité de la sphère, il faut voir ce que devient l'expression du polyèdre lorsque l'angle solide est 360ᵈ; mais pour lors la surface du polyèdre se confond avec celle de la sphère, et la perpendiculaire abaissée du centre du polyèdre, devient le rayon de la sphère; donc la solidité de la sphère est égale au produit de sa surface, par le tiers de son rayon.

340. *Corollaire.* La solidité de la sphère est à celle du cylindre circonscrit, comme 2 : 3.

Fig. 116. Car la solidité de la sphère s'estime par le produit de quatre grands cercles, par le tiers du rayon, ou le sixième du diamètre; et celle du cylindre circonscrit s'estime par le produit d'un grand cercle par le diamètre; elles sont donc entr'elles comme $\frac{4}{6}$: 1, ou :: 2 : 3; c'est-à-dire qu'il y a le même rapport entre les solidités de ces deux corps qu'entre leurs surfaces (297).

341. *Scholie premier.* Ce rapport trouvé par Archimède,

Archimède, entre les surfaces et les solidités de la sphère et le cylindre circonscrit, s'étend aussi au cône, et généralement à tous les corps circonscrits à la sphère. Les solidités de tous ces corps sont entr'elles comme leurs surfaces. Qu'on imagine, par exemple, un polyèdre circonscrit à la sphère, toutes les pyramides dont est composé le polyèdre, ont pour hauteur le rayon de la sphère; donc la solidité de la sphère et du polyèdre, ayant un facteur commun, sont entr'elles comme l'autre facteur, c'est-à-dire comme les surfaces.

342. *Scholie deuxième.* La mesure de tous les solides, dépend de celle d'un rhomboïde rectangle; car, 1°. un rhomboïde quelconque s'estime de la même manière qu'un rhomboïde rectangle de même base et de même hauteur; 2°. un prisme polygonal est égal à un rhomboïde qui auroit même hauteur, et dont les bases seroient égales en surfaces; 3°. un cylindre est égal à un prisme de même hauteur, dont la base seroit égale au cylindre; 4°. une pyramide et un cône peuvent se réduire à un prisme, et un cylindre dont la hauteur seroit le tiers de celle de la pyramide; 5°. la solidité d'un polyèdre et celle de la sphère, dépendent de celle de la pyramide; donc, si on sait évaluer les rhomboïdes rectangles, on saura évaluer tous les autres solides; or la solidité de celle-ci peut se comparer aisément au cube; donc on aura facilement la mesure des autres.

ARTICLE III.

Du Toisé des solides.

343. Evaluer une solidité, c'est déterminer en nombres, combien de fois le solide donné contient un solide connu qui sert d'unité de mesure.

Les solides qui servoient ordinairement d'unité de mesure dans ces sortes d'opérations étoient le pouce cube, le pied cube, la toise cube.

Pour mesurer un rhomboïde rectangle, on choisissoit une des faces, telles que *ABCD*, que l'on considéroit comme la base du solide : on mesuroit en toises le grand côté *CD*, et le petit côté *AC* du rectangle qui forme cette base, puis l'un des
Fig. 146, 147. quatre côtés *CP*, *PR*, *AG*, *BF* qui donnent la hauteur du solide. Multipliant entr'elles les longueurs de ces trois dimensions, leur produit exprimoit le nombre de toises cubes contenues dans le solide.

Mais lorsque la mesure des côtés du solide prise à l'aide de la toise, donnoit un reste composé de pieds, de pouces.... etc. dans ce cas, la solidité renfermoit, outre un certain nombre de toises cubes complètes, un excédant que l'on évaluoit en parties de la toise cube. Ces parties étoient ellesmes des rhomboïdes rectangles, ayant tous pour base une toise quarrée, et dont les hauteurs étoient égales successivement à un pied, à un pouce : en conséquence, on nommoit ces petits solides, des toises-toises-pieds, des toises-toisespouces, suivant qu'elles avoient pour hauteur le pied ou le pouce.

Pour parvenir à cette évaluation du solide en

toises cubes, et en parties de la toise cube, il falloit d'abord chercher la surface de la base par une multiplication composée, semblable à celle dont nous avons parlé (236), et dont le produit donnoit le nombre de toises quarrées, de toises pouces renfermées dans cette base ; ce produit servoit de multiplicande dans une seconde opération, où la division de la hauteur étoit prise pour multiplicateur ; ce qui exigeoit un nouveau travail, souvent plus long, et plus compliqué que le premier, pour arriver au résultat qui donnoit la solidité du rhomboïde en toises cubes, et fractions de la toise cube. Dans les opérations analogues, faites à l'aide du nouveau système, après avoir trouvé la surface de la base à l'aide de la méthode indiquée (236), on parvient à évaluer la solidité par une multiplication tout aussi simple et aussi facile. Cette solidité se trouve exprimée en mètres cubiques complets, plus en dixièmes ou centièmes de mètres cubiques.

Supposons que la figure *M* représente un mètre cubique ; ayant pris sur le côté *FM* une partie égale à un décimètre ; si par le point *L*, nous faisons passer un plan *LNGV* qui soit parallèle au quarré *FHDA*, on conçoit aisément que la tranche renfermée entre ces deux plans sera un dixième de mètre cubique. Cette tranche est, comme l'on voit, un rhomboïde qui a pour base un mètre quarré *FHDA*, et dont la hauteur ou épaisseur est un dixième de mètre, ou un décimètre. On pourra de même diviser cette tranche entre les points *FL*, toujours parallèlement au quarré *FHDA*, de manière à en détacher une nouvelle partie dont la base sera encore un mètre quarré, et la hauteur un dixième de *FL*, ou un centième,

et il est visible que cette partie sera un centième du mètre cube.

344. *Problême premier.* On demande la solidité d'un rhomboïde rectangle, dont la longueur est de $5^{mt.}$,1 ; la largeur de $3^{mt.}$,2 et la profondeur ou épaisseur de $2^{mt.}$,3.

On commence par multiplier 5,1 par 3,2, ce qui donne la surface de la base = $16^{mt.}$,32e; on multiplie de nouveau ce produit par 3,2, ce qui donne un nombre abstrait 52,224, exprimant le rapport de la solidité du rhomboïde en question au mètre cubique, ou, ce qui revient au même, la solidité de ce corps est de 52 mètres cubiques, plus 2 dixièmes de mètre cubique, plus 2 centièmes de mètre cubique, plus 4 millièmes de mètre cubique.

345. *Problême deuxième.* On demande la solidité d'un massif de maçonnerie dans lequel une des dimensions est de $5^{mt.}$,23, la seconde de $4^{mt.}$,6, la troisième de $2^{mt.}$,74.

On multipliera d'abord 5,23 par 4,6, ce qui donnera pour produit 24,058 : on multipliera de nouveau ce produit par 2,74 ; le résultat de cette dernière multiplication sera 65,919, en se bornant aux millièmes de mètre cubique.

346. Pour évaluer les bois de charpente, on prenoit pour unité de mesure la solive qui étoit un solide de trois pieds cubes. Dans le nouveau système on a jugé inutile de créer une unité de mesure différente : il est beaucoup plus simple de rapporter toutes ces mesures de solidité au mètre cubique. Quant aux mesures de capacité nécessaires pour évaluer les grains, les liquides, il suffit de connoître leur rapport avec le mètre cube pour pouvoir les calculer sans difficulté : on les trouvera dans la table suivante.

MESURES DE CAPACITÉ.

Kilolitre (mètre cube).....	29,2032 pieds cub.
Hectolitre................	2,9203
Décalitre................	0,292
Litre (décimètre cube)....	50,4576 pouc. cub.
Décilitre.................	5,0457
Centilitre................	0,5045
Millilitre (centimètre cube)..	0,0504

ARTICLE VI.

Rapport des solides semblables.

347. Deux solides quelconques sont semblables, lorsqu'ils sont compris sous un égal nombre de plans semblables, et qu'ils ont les angles solides égaux chacun à chacun.

Pour que les plans soient semblables, il est nécessaire que les côtés homologues soient proportionnels. Ainsi dans les solides semblables, les trois dimensions doivent être en proportion.

Si d'un point fixe on mène des droites à tous les angles d'un polyèdre, et qu'on les prolonge proportionnellement, en faisant passer des plans par les extrémités de ces droites, on formera un nouveau polyèdre semblable au premier.

Si l'on détermine deux points situés sur une droite, passant par un point fixe, et à des distances proportionnelles aux côtés homologues des deux polyèdres, ces deux points seront semblablement placés.

Si on détermine autres deux points situés sur une seconde droite, passant par le point fixe, et à

des distances proportionnelles ; et que de chaque point déterminé sur la première ligne on tire une droite à son correspondant sur la seconde ligne, ces lignes seront semblablement placées. Deux surfaces planes, terminées par des lignes semblablement placées, seront semblablement placées. Enfin, deux solides terminés par des plans semblablement placés seront placés semblablement.

348. *Théorême.* Deux prismes semblables, sont entr'eux comme les cubes des côtés homologues.

Car en général deux prismes sont entr'eux comme les produits de leur trois dimensions; ainsi en appelant B, C, D, les trois dimensions du premier prisme M et b, c, d, les dimensions homologues du second m, on a la proportion sol. M : sol. m :: $BCD : bcd$; mais quand les solides sont semblables, $C : c :: B : b$, $D : d :: B : b$; donc $CD : cd :: B^2 : b^2$; et en multipliant par la proportion identique $B : b :: B : b$, on a $BCD : bcd :: B^3 : b^3$, donc, etc.

349. *Théorême.* Deux pyramides semblables sont entr'elles comme les cubes des côtés homologues.

Car les pyramides en général sont entr'elles comme les produits de leurs dimensions; donc la démonstration du théorême précédent, s'y applique sans restriction.

350. *Théorême.* Deux polyèdres semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

Car deux poylèdres semblables peuvent être partagés en un égal nombre de pyramides semblables, chacune à chacune; or chaque pyramide est à sa correspondante dans le second polyèdre, comme le cube de la hauteur de la première, est au cube de

la hauteur de la seconde, et les hauteurs de ces pyramides, sont entr'elles comme deux lignes semblablement tirées dans les deux polyèdres; donc la somme de toutes les pyramides qui composent un polyèdre, ou le polyèdre lui-même, est au second polyèdre, comme le cube d'un côté quelconque du premier, est au cube du côté homologue du second.

351. *Corollaire.* Deux sphères sont entr'elles comme le cube de leurs rayons ou de leurs diamètres, ou en général comme le cube de deux lignes semblablement tirées dans les deux.

Car les sphères sont les limites des polyèdres qu'on peut leur inscrire et circonscrire; or, quel que soit le nombre des faces latérales, et quels que soient les angles solides de deux polyèdres semblables, ils sont toujours entr'eux comme le cube des dimensions homologues; donc ce rapport est invariable et par conséquent il aura lieu à la limite; donc, etc.

352. *Scholie.* Si l'on a quatre lignes dont les longueurs soient en progression géométrique, le cube construit sur la première est au cube construit sur la seconde, comme la première est à la quatrième.

Car quel que soit le rapport, il est visible par la nature des progressions (*Alg.* 116), que la raison du premier terme au quatrième, est triplée de celle du premier au second; donc on formera une proportion géométrique avec ces quatre termes: le cube construit sur la première ligne, le cube construit sur la seconde, la première ligne et la quatrième.

Si la première ligne étoit 1, et la quatrième 2, et qu'on pût trouver deux autres moyennes proportionnelles entre ces deux lignes, on pourroit faire un cube double d'un cube donné. Il faudroit pour

cela pouvoir extraire la racine cubique de 2, or on trouve par une construction bien simple, la racine quarrée de 2 (216); mais on ne peut pas trouver de même sa racine cubique, c'est en cela que consiste le problême de la duplication du cube, si fameux parmi les anciens.

TRIGONOMÉTRIE.

253. La trigonométrie est l'art de déterminer les parties inconnues d'un triangle, par le rapport qu'elles ont avec les quantités connues.

Un triangle est composé de six quantités, trois côtés et trois angles, tellement dépendantes les unes des autres, que la connoissance de certaines, détermine celle des autres. On a vu, par exemple (69), que les triangles semblables ont les côtés homologues proportionnels, et réciproquement, lorsque les côtés homologues sont proportionnels dans deux triangles différens, les angles sont égaux, et les triangles semblables.

On pourra déduire de cette propriété fondamentale des triangles, la connoissance des parties inconnues, toutes les fois qu'il sera possible de former un triangle semblable au triangle donné; mais un pareil moyen seroit toujours pénible, et souvent impraticable. Il a donc fallu chercher dans la similitude même des triangles, un moyen plus simple et plus commode.

254. Si l'on conçoit un triangle ABC, inscrit dans le cercle, les côtés du triangle seront les cordes des arcs dont les moitiés mesurent les angles opposés du triangle.

Une table où l'on trouveroit calculées, en parties du rayon, les longueurs des cordes correspondantes à tous les arcs, depuis zéro jusqu'à 180^d, Fig. 140.

feroit connoître les rapports qui existent entre les côtés du même triangle, dont on connoîtroit les angles, et réciproquement, la connoissance des rapports que les côtés ont entr'eux mèneroit à la connoissance des angles.

Pour rendre ceci plus sensible, supposons l'angle B de 100^d, l'angle C de 50^d, l'angle A de 30^d, l'arc AC sera de 200^d, l'arc AB de 100^d, et l'arc BC de 60^d, les trois côtés AC, AB, BC, auront entr'eux le même rapport que les moitiés des cordes qui soutendent les arcs de 200^d, de 100^d et de 60^d. Or, le rapport qu'ont entr'elles les cordes des différens arcs pris dans le même cercle, est facile à déterminer; donc si on le calcule pour tous les arcs, et qu'on en construise des tables, il fournira le moyen de faire une proportion avec les deux côtés du triangle dont ces cordes sont les moitiés.

Mais puisque les angles du triangle inscrit, n'ont pour mesure que la moitié des arcs compris entre leurs côtés, il paroît plus simple de supposer l'angle au centre du cercle; et de ne calculer que la moitié des cordes qui soutendent des arcs doubles, lesquelles moitiés sont proportionnelles aux cordes totales, et se déterminent en abaissant une perpendiculaire de l'extrémité de l'arc qui sert de mesure à l'angle, sur le côté qui passe par l'autre extrémité.

Ces perpendiculaires ne sont pas les seules lignes qu'on a introduites dans la géométrie, il en est plusieurs autres dont nous allons faire connoître les propriétés, les valeurs et les usages.

DÉFINITION.

355. On appelle sinus d'un arc ou d'un angle la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de cet arc sur le rayon, ou le diamètre qui passe par l'autre extrémité de l'arc.

Ainsi BD est le sinus de l'angle BCD, ou de l'arc BA. On voit aussi que BD est la moitié de BF, qui soutend un arc double de BA; on peut donc dire que le sinus d'un angle, ou d'un arc BA, est la moitié de la corde qui soutend un arc double (1). Fig. 148.

La partie du rayon DA, comprise entre le sinus et l'arc, se nomme sinus-verse de l'arc.

La droite AT, élevée perpendiculairement sur l'extrémité du rayon CA, qui passe par l'origine de l'arc, et qui est terminée par le prolongement du rayon CB, qui passe par l'autre extrémité, s'appelle tangente de cet arc.

Le rayon CB, prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente AT, se nomme sécante de l'arc AB.

L'arc EB est le complément de AB, et ce complément a son sinus GB, son sinus-verse GE sa tangente EN, sa sécante CN.

Les sinus, sinus-verse, tangente, sécante, de l'angle de complément, sont aussi appelés cosinus, cosinus-verse, cotangente, cosécante, et pour

---

(1) Il paroît vraisemblable que le mot sinus tire son origine de *semicès inscriptæ*, moitié de la corde inscrite, ou opposée à l'angle inscrit. Pour abréger, on se contente d'écrire *s. ins.*, d'où est dérivé par corruption du langage le mot sinus.

abréger, on écrit seulement sin. cos. sin-v. cos-v. tang. cot. séc. coséc.... etc.

Le sinus GB, de l'angle de complément, est égal à CD, en sorte que le cosinus d'un angle, est égal à la partie du rayon comprise entre le centre et le sinus; et le rayon, le sinus, et le cosinus d'un angle, forment toujours un triangle rectangle, dont le rayon est l'hypoténuse.

Tous les angles formés dans la partie du cercle, supérieure au diamètre PA, ont le sinus positif; et tous ceux formés dans la partie inférieure, ont leur sinus négatif.

Tous les angles formés dans la partie du cercle, antérieure au diamètre EM, ont leur cosinus positif; et tous ceux qui sont formés dans la partie postérieure, ont leur cosinus négatif.

Les tangentes prises dans la partie supérieure sont positives, et celles prises dans la partie inférieure, sont négatives.

Les sécantes prises dans la partie antérieure, sont positives; et celles qui sont prises dans la partie postérieure, sont négatives.

356. Il suit de ces définitions, et de l'inspection de la figure,

1°. Qu'un arc moindre que 90^d, a son sinus positif, ainsi que son cosinus, sa tangente, sa cotangente, sa sécante, sa cosécante.

2°. Qu'un arc plus grand que 90^d, mais moindre que 180^d, a son sinus positif, son cosinus négatif, la tangente et la cotangente négative, la sécante négative, et la cosécante positive.

3°. Que le sinus d'un arc de 90^d, est égal au rayon (c'est le plus grand de tous les sinus, on le nomme pour cela le sinus total). Son cosinus est zéro, sa tangente et sa sécante étant parallèles, ne peu-

vent pas se rencontrer, elles sont par conséquent infinies.

4°. Que le sinus d'un arc de zéro de degrés ou de 180^d, est zéro. Le cosinus est égal au rayon pris positivement pour le premier, et négativement pour le second. La tangente est zéro, la sécante est égale au rayon, la cotangente et la cosécante sont infinies, positives ou négatives.

5°. Que le sinus de 30^d, étant la moitié de la corde de 60^d, ou du côté de l'hexagone inscrit, est égal à la moitié du rayon.

6°. Que la tangente de 45^d, formant un triangle rectangle isocèle avec la sécante et le rayon, est égale au rayon.

Ces notions posées, nous allons démontrer les rapports qui règnent entre ces différentes lignes.

357. *Théorême.* La tangente d'un arc BA est égale au produit du rayon multiplié par le sinus, et divisé par le cosinus.

Car les triangles semblables BCD, TCA, donnent la proportion $TA : BD :: CA : CD$, ou en appelant le rayon R, et nommant A l'arc BA, tang. A : sin. A :: R : cos. A; donc tang. $A = \frac{R.\,\text{sin.}\,A}{\text{cos.}\,A}$. Fig. 148.

358. *Théorême.* La sécante d'un arc ou d'un angle BCA, est égale au quarré du rayon divisé par le cosinus.

Car les deux mêmes triangles semblables donnent la proportion $CT : CB :: CA : CD$, ou séc. $A : R :: R :$ cos. A; donc séc. $A = \frac{R^2}{\text{cos.}\,A}$.

Théorême. La cotangente d'un arc BA, est égale au produit du rayon multiplié par le cosinus de l'angle, et divisé par le sinus.

Car les deux triangles semblables ECN, BCG, donnent la proportion $EN : GB :: EC : CG$, ou cot. A : cos. A :: R : sin. A; donc cot. $A = \frac{R. \text{ cos. } A}{\text{sin. } A}$.

On peut encore dire que la cotangente est égale au quarré du rayon divisé par la tangente, car les triangles ENC, CTA sont semblables; donc on a la proportion $EN : EC :: CA : AT$, cot. A : R :: R : tang. A.... donc cot. $A = \frac{R^2}{\text{tang. } A}$.

359. *Théorême.* La cosécante d'un arc BA est égale au quarré du rayon divisé par le sinus.

Car les deux mêmes triangles semblables donnent la proportion $NC:EC :: BC:CG$, ou cosée. A : R :: R: sin. A; donc coséc. $A = \frac{R^2}{\text{sin. } A}$.

360. *Corollaire.* Connoissant les sinus et cosinus de tous les arcs, il sera aisé de connoître les tangentes, cotangentes, sécantes, cosécantes des mêmes arcs, et réciproquement.

Quant au sinus-verse, il est égal au rayon moins le cosinus.

Scholie. Les sinus des arcs au-dessus de 45^d jusqu'à 90^d, sont les cosinus des arcs au-dessous de 45^d jusqu'à zéro; et les cosinus des arcs depuis zéro jusqu'à 45^d, sont les sinus des arcs depuis 45^d jusqu'à 90^d.

Quant au sinus et cosinus des angles obtus KCA, ils sont les mêmes que ceux de leurs supplémens KCP, comme on peut s'en assurer en comparant la définition des sinus à la construction de la figure. Il suffit donc, pour calculer des tables, de chercher

les sinus et cosinus de tous les angles depuis zéro[d] jusqu'à 45[d] inclusivement.

On peut encore observer que les sinus et cosinus étant des cordes, ou moitié des cordes, sont toujours comparés aux rayons du cercle auquel elles appartiennent; et si on prend le rayon pour l'unité linéaire, les sinus et cosinus seront des fractions de cette unité, et ne présenteront que des nombres abstraits, exprimant le rapport invariable que chaque sinus ou cosinus a avec le rayon du cercle auquel le triangle qu'on mesure peut être inscrit (1).

---

(1) La même ligne peut être en même temps sinus de deux angles différens, en la comparant à deux rayons différens. Ainsi la ligne AD (*fig. 149*) comparée au rayon CA, est le sinus de l'angle ACD; et elle est le sinus de l'angle ABD, lorsqu'on prend AB pour rayon; et puisque les sinus expriment les rapports des cordes aux rayons, il s'ensuit que $\frac{AD}{AC}$ exprimera le sinus de ACD, et $\frac{AD}{AB}$, celui de ABD. Lorsqu'on compare ainsi la même ligne AD à deux rayons différens AC, AB, on peut supposer un de ces rayons $= 1$; mais on ne pourroit pas, sans erreur, prendre les deux pour unité. Ainsi si nous supposons $AC = 1$, on aura sin. $ACD = AD$, et sin. $BDA = \frac{AD}{AB}$, ou $\frac{CN}{BC}$, et cos. $ACD = CD$... cos. $ABD = \frac{BD}{AB}$, ou $\frac{BN}{BC}$.....

CONSTRUCTION DES TABLES DES SINUS, etc.

Principe fondamental.

361. Le principe fondamental de la construction des tables est renfermé dans les quatre théorêmes suivans.

362. *Théorême.* Le sinus de la somme de deux angles est égal au produit du sinus du premier par le cosinus du second, plus au produit du cosinus du second par le cosinus du premier.

Fig. 149. Soit le triangle ABC: prolongeons le côté BC jusqu'en D; abaissons la perpendiculaire AD de l'extrémité du côté BA sur BC prolongé, et du point C la perpendiculaire CN. La ligne AD est le sinus de l'angle ACD, lorsque CA est pris pour rayon, et CD en est le cosinus. Or, l'angle extérieur ACD est égal à la somme des deux angles intérieurs $A + B$ qui lui sont opposés. On a donc sin. $(A+B) = AD$ (CA étant supposé égal à 1)... Les deux triangles semblables ABD, CBN donneront la proportion $AD : CN :: AB : BC$; donc

$$AD = CN\frac{AB}{BC} = CN.\frac{BN}{BC} + \frac{CN.NA}{BC};$$

mais CN est le sinus de l'angle A, $\frac{BN}{BC}$ est le cosinus de l'angle B, NA est le cosinus de l'angle A, et $\frac{CN}{BC}$ est le sinus de l'angle B; donc AD, ou sin. $(A + B) =$ sin. $A \times$ cos. $B \times$ sin. $B \times$ cos. A.

363. *Théorême.* Le cosinus de la somme des deux

deux angles $A+B$ est égal au cosinus du premier, multiplié par le cosinus du second, moins le sinus du premier, multiplié par le cosinus du second.

Car on a $CD = \cos. ACD = \cos. (A + B)$. Or, on a la proportion $BC + CD : BN + NA :: BN : BC$; donc $CD = NA . \frac{BN}{BC} - \left(\frac{\overline{BC}^2 - \overline{BN}^2}{BC}\right)$; mais par la propriété du triangle rectangle, ce dernier terme est égal à $\overline{CN}^2 = CN \times CN$; donc $CD = NA . \frac{BN}{BC} - CN . \frac{CN}{BC} = \cos. A \cos. B - \sin. A . \sin B$.

364. *Théorême.* Le sinus de la différence des deux angles A, B est égal au produit du sinus du premier par le cosinus du second, moins le produit du sinus du second par le cosinus du premier.

Soit le triangle ABC. Du point C comme centre, décrivez l'arc OA, et abaissez la perpendiculaire CN: on a $CA = CO$, et $NA = ON$. De plus l'angle $COA = CAO = A$; donc l'angle $OCB = A - B$. Fig. 150.

$OL = \sin. A - B$ ($OC = CA$ étant égal à 1). Or, $OL : CN :: BO : BC$; mais $BO = BN - AN$; donc $OL = CN . \frac{BN}{BC} - AN . \frac{CN}{BC}$, c'est-à-dire, $\sin. (A - B) = \sin. A \cos. B - \sin. B \cos. A$.

365. *Théorême.* Le cosinus de la différence des deux angles A, B est égal au produit du cosinus du premier par le cosinus du second, plus le produit du sinus du premier par le sinus du second.

Car on a la proportion $BL : BO :: BN : BC$, ou $BC - CL : BN - NO :: BN : BC$... donc

$$CL = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{BN}^2}{BC} + AN \,.\, \frac{BN}{BC} = AN \,.\, \frac{BN}{BC} + CN \,.\, \frac{CN}{BC} = \cos. A . \cos. B + \sin. A \sin. B.$$

366. *Scholie.* On auroit pu déduire directement ces derniers résultats du théorême premier, en changeant convenablement les signes des sinus et cosinus. Les résultats qu'on auroit obtenus, conformes d'ailleurs aux précédens, peuvent servir à faire comprendre la nature, et l'usage des quantités négatives. Les formules que nous venons de démontrer, sont si nécessaires dans la théorie des sinus, qu'on ne peut pas se dispenser de les savoir par cœur. C'est pourquoi nous allons les présenter dans un même tableau.

$$\sin. A + B = \sin. A \cos. B + \sin. B \cos. A$$
$$\cos. A + B = \cos. A \cos. B - \sin. A \sin. B$$
$$\sin. A - B = \sin. A \cos. B - \sin. B \cos. A$$
$$\cos. A - B = \cos. A \cos. B + \sin. A \sin. B$$

PROBLÊME GÉNÉRAL.

367. Construire des tables de sinus, cosinus, tangentes..... etc. pour construire les tables de sinus, il faut prendre un arc très-petit; par exemple, 1″. Son sinus et son cosinus étant supposés connus, on déterminera facilement, par les théorêmes démontrés, les sinus et cosinus de 2″, 3″, 4″... de 10″, de 20″... et ainsi de suite de dix en dix secondes jusqu'à une minute. Celui d'une minute étant connu, on aura celui de 2′, de 3′, de 4′.... jusqu'à 60′ = 1^d. En continuant toujours par des calculs semblables, on parviendra au sinus et cosinus de 45^d. Les sinus et cosinus depuis 1″ jusqu'à 45^d étant connus, il

sera facile d'en déduire l'expression des tangentes, cotangentes, sécantes, cosécantes..... etc. par le moyen des formules démontrées (156).

Pour connoître le sinus et cosinus de l'arc d'une seconde, voici comme on peut y parvenir.

Le sinus de l'arc de 30^d est donné immédiatement et sans calcul. Il est la moitié du rayon (356) : on aura son cosinus par la propriété du triangle rectangle. On connoîtra donc son sinus verse, qui, formant un triangle rectangle ABC avec le sinus AC, et la corde du même arc AB, donnera la valeur de cette corde, dont la moitié sera le sinus de 15°. On trouvera de la même manière le sinus de $7^d\ 30'$.... de $3^d\ 45'$.... et continuant à prendre les sinus de la moitié, on parviendra à celui d'un angle qui ne différera pas sensiblement d'une seconde. Fig. 154

Depuis l'invention des logarithmes, les tables ne renferment que les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, sécantes, cosécantes. Ces logarithmes réunis à ceux des nombres naturels, facilitent toutes les opérations de la trigonométrie, parce qu'ils fournissent le moyen de convertir les proportions géométriques, en proportions arithmétiques, beaucoup plus faciles à calculer que les premières.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

368. L'application générale des principes de la trigonométrie à la résolution des triangles est fondée sur les trois propositions suivantes.

369. *Théorême.* Dans tout triangle rectiligne, les sinus des angles sont entr'eux comme les côtés opposés aux angles.

Fig. 149. Soit le triangle ABC. Du point A soit abaissée la perpendiculaire AD sur le côté BC prolongé ; du point B, soit abaissée la perpendiculaire BF, et du point C la perpendiculaire CN... BF et AD sont les sinus des angles A et B, en prenant AB pour rayon... CN et BF sont les sinus des angles B et BCF, en prenant BC pour rayon... CN et AD sont les sinus des angles A et ACD, en prenant CA pour rayon.

Les deux triangles semblables ACD, BCF donnent la proportion $AD : CA :: BF : BC$..... ou sin. $B : CA ::$ sin. $A : BC$.

Les deux triangles semblables ADB, CNB donnent la proportion $CN : BC :: AD : AB$..... ou sin. $A : BC ::$ sin. $ACD =$ sin. ACB (360) : AB ; donc les sinus des trois angles sont proportionnels aux côtés qui leur sont opposés.

Fig. 151. 370. *Théorême.* Dans tout triangle rectiligne, un côté est à la somme des deux autres, comme la différence des mêmes côtés est à la somme, ou à la différence des segmens faits par la perpendiculaire qu'on mèneroit d'un angle sur le côté opposé.

Soit le triangle ABC. Du point B comme centre, et d'un rayon égal au plus petit côté, soit décrit un cercle qui coupe les deux autres côtés en MN. Prolongez le côté BC jusqu'en F, et menez la perpendiculaire BD ; FC et AC seront deux sécantes qui se coupent hors du cercle. On a donc la proportion, $AC : FC :: MC : NC$ (77), ou $AC : AB + BC :: MC : NC$; mais MC est la différence des deux côtés BC, BA ; NC est la différence des deux segmens DC, DA.... donc, etc. Si l'angle BAC étoit obtus, la perpendiculaire BD tomberoit hors du triangle, et l'on auroit la proportion $AC : AB + BC :: MC : NC$. Mais dans

cette hypothèse $NC = AC + AN = DC + DN$, c'est-à-dire, que NC est la somme des segmens, formés par la perpendiculaire BD qui tombe sur AC prolongé ; donc... etc.

371. *Théorême.* Dans tout triangle rectiligne, la somme de deux côtés est à la différence des mêmes côtés, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés aux deux côtés connus, est à la tangente de la demi-différence des mêmes angles.

Car soit le triangle ABC, prolongez CB jusqu'en F. Du point A, menez la ligne AM ; du point B, le rayon BL ; et du point M, la ligne MN perpendiculaire sur AM.

Les deux triangles semblables FAC, MNC, Fig. 155. donneront la proportion $FC : MC :: FA : MN$... Or, $FC = BC + BA =$ la somme de deux côtés ; 2°. $MC = BC - BA =$ la différence des deux mêmes côtés ; 3°. FA étant perpendiculaire sur AM (107) est la tangente de FMA (AM étant rayon).... FMA est la moitié de FBA, et l'angle extérieur $FBA = C + A$; donc FA est la tangente de la moitié de la somme des angles opposés aux côtés BA, BC... Enfin, MN est la tangente de MAN, lequel égale la moitié de MBL. Or, MBL est la différence entre BAC et BCA ; donc la proportion précédente est la même que celle-ci, $BC + BA : BC - BA ::$ tang. $\frac{A+C}{2}$: tang. $\frac{A-C}{2}$.

372. *Corollaire.* De cinq choses qu'on peut considérer dans un triangle ; savoir, trois côtés et deux angles, si on en connoît trois, il sera toujours possible de déterminer les deux autres, en aisant usage des trois théorêmes précédens.

Ces trois théorêmes suffisent pour la résolution

de toute sorte de triangles rectilignes ; mais quand le triangle est rectangle, on peut y ajouter le suivant qui rendra la solution plus simple dans un grand nombre de cas.

373. *Théorême.* Dans un triangle rectangle ABC, on a la proportion, le rayon des tables est à la tangente des tables, comme le côté BC est au côté BA.

Fig. 155. Car soit pris la ligne Cm pour le rayon des tables, il est visible que mn sera la tangente des tables; mais les deux triangles semblables nmC, ABC donnent la proportion $Cm : mn :: CB : BA$; donc on a le rayon des tables à la tang. $C :: CB : BA$.

374. *Corollaire.* Le rayon des tables étant 1, il s'ensuit que $BA = CB \times$ tang. C.

APPLICATIONS.

375. *Problême premier.* Déterminer la hauteur d'une tour AC, dont le pied est accessible. Mesurez sur le terrein supposé horizontal, à partir du
Fig. 156. pied C une base arbitraire CB. Placez le graphomètre à l'extrémité de cette base, de manière que le plan de l'instrument se confonde avec celui du triangle ACB. Mettez l'alidade fixe dans une position horizontale : faites tourner l'alidade mobile jusqu'à ce qu'on puisse appercevoir au travers des pinules le sommet A de la tour. L'arc du graphomètre, intercepté entre les deux alidades, donnera la mesure de l'angle ABC. L'angle ACB étant droit, l'angle BAC sera le complément de l'angle B. On fera donc la proportion $1 :$ tang. $B :: BC : X = BC \times$ tang. B. Le côté AC sera

donc connu. Ajoutant à AC la hauteur du pied du graphomètre, on aura la hauteur totale de la tour.

376. *Problême deuxième.* Déterminer la hauteur de la tour, quand le pied est inaccessible.

On prendra sur le terrein un point O tellement situé, qu'on puisse appercevoir le point C, et mesurer commodément la ligne OB. On placera d'abord le centre du graphomètre au point B pour mesurer l'angle OBC : on mesurera aussi l'angle BOC. Dans le triangle BOC, on connoîtra deux angles et un côté : on fera donc la proportion sin. $C : BO ::$ sin. $O : BC$.... Après avoir déterminé BC, on s'en servira pour résoudre le triangle ABC, comme dans le problême précédent.

377. *Problême troisième.* Déterminer la hauteur méridienne du soleil, par le moyen de l'ombre d'un style. Fig. 152.

Soit SA un style vertical, dont la hauteur est connue, AB l'ombre du style occasionnée par le soleil à midi. L'angle SBA mesurera la hauteur du soleil sur l'horizon : on mesurera l'ombre AB: on connoîtra donc les deux côtés SA, BA, et l'angle droit dans le triangle rectangle SAB. On fera donc la proportion $BA : SA :: 1 :$ tang. $B = \frac{SA}{BA}$. On connoîtra donc cette tangente, et par conséquent l'angle de hauteur sera connu.

378. (m) *Problême quatrième.* Mesurer la distance AB de deux objets visibles et inaccessibles.

On mesurera sur le terrein une base DC; du point D, on mesurera les angles ADC, ADB, BDC; du point C, on mesurera aussi les angles ACB, ACD, BCD. Dans le triangle ADC, Fig. 157.

on connoît les angles ADC, ACD, et le côté CD. On déterminera donc les côtés AD et AC par le théorême (369).

Dans le triangle BDC, on connoît pareillement les angles BDC, BCD, et le côté CD : on pourra donc déterminer BD et BC.

Dans le triangle ADB on connoît les deux côtés AD, BD, et l'angle compris ADB. On connoît donc la somme des deux autres angles A, B... Mais par le théorême (371) on connoîtra leur demi-différence ; donc on pourra les connoître chacun séparément (*Alg.* 79).

Pour connoître le côté AB, on fera la proportion sin. $B : AD ::$ sin. $D : AB$. On connoîtra donc la distance AB des deux objets.

379. *Problême.* Etant donnés les trois côtés d'un triangle ABC, trouver ses trois angles.

Fig. 158. D'un angle quelconque B, on peut concevoir une perpendiculaire BM abaissée sur le côté opposé AC, qui sera divisé en deux segmens inégaux. Le théorême (370) fournira le moyen de connoître chaque segment en particulier.

Dans le triangle rectangle ABM on connoîtra les deux côtés AB, AM, et l'angle droit M. On pourra donc calculer la valeur de l'angle A, et l'angle ABM sera connu.

Dans le triangle rectangle BMC, on connoîtra les deux côtés BC, MC, et l'angle droit M. On pourra donc calculer l'angle C, et l'angle CBM sera connu.

En réunissant les deux angles $ABM + CBM$, on aura l'angle ABC..... donc les trois angles seront connus.

380. *Scholie.* La trigonométrie rectiligne four-

nit plusieurs autres formules plus générales pour la résolution des triangles. Nous avons ſait usage des plus élémentaires : elles suffisent dans un ouvrage où l'on ne se propose que de donner les principes les plus simples des mathématiques. Ceux qui desireront plus de détails, peuvent consulter les notes qui sont à la fin de l'ouvrage.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

381. La trigonométrie sphérique a pour objet la détermination des angles et des côtés d'un triangle sphérique, quand on connoît trois des six parties dont il est composé ; savoir, trois angles et trois côtés.

Si l'on conçoit les droites AO, CO, BO me-
Fig. 141. nées du centre de la sphère aux angles du triangle sphérique ACB, et qu'on imagine les plans AOB, AOC, COB se réunissant au centre où ils forment l'angle solide O, la partie de la solidité de la sphère comprise entre les trois plans et le triangle sphérique, sera une pyramide qu'on nomme sphérique, parce que sa base est une portion de la sphère : il est visible, 1°. que les côtés AB, AC, CB du triangle sphérique sont la mesure des trois angles plans, qui, par leur réunion, forment l'angle solide O du sommet de la pyramide ; 2°. les angles du triangle sphérique ACB, CAB, ABC sont les inclinaisons mutuelles des plans AOC, BOC, AOB qui concourent au sommet (299) ; ainsi la considération des pyramides triangulaires suffit pour déterminer les rapports entre les angles et les côtés d'un triangle sphérique, ou plutôt entre les sinus des angles du triangle, et ceux des arcs qui forment les côtés.

382. Pour former un triangle sphérique sur la surface d'une sphère, il est nécessaire que les deux arcs $AB'B$, ACB, qui forment le fuseau, soient

coupés par un troisième $B'C$, avant que les deux premiers se réunissent au point B: par la même raison, les deux arcs $B'AM$, $B'CM$ doivent être coupés par un troisième AC, avant leur réunion en M. Ainsi chaque côté du triangle sphérique est nécessairement moindre que 180°; deux côtés quelconques pris ensemble sont plus grands que le troisième (272), et la somme des trois est toujours moindre que la circonférence d'un grand cercle (270). Fig. 141.

383. La trigonométrie sphérique doit son origine à l'astronomie, où elle est d'une nécessité indispensable; aussi la trouve-t-on dans presque tous les Traités d'Astronomie. Notre objet n'étant pas d'en donner ici un traité complet, nous nous contenterons de poser les principes de cette science, et nous renverrons aux Traités très-estimés de Deparcieux, de Mauduit, de Bézout, de Lalande, de Cagnoli....., &c. ceux qui desireront un plus grand détail.

Toute la trigonométrie sphérique n'est que le développement des deux théorêmes suivans.

384. *Théorême premier.* Dans tout triangle sphérique ACB, les sinus des angles A, B, C sont proportionnels aux sinus des côtés BC, AC, AB, qui leur sont opposés.

Soit la pyramide sphérique $ABCO$, dont nous allons développer la surface sur un plan, pour mieux concevoir la position des lignes. L'arc total $CABC$ est égal à la somme des trois côtés CA, CB, AB: l'angle CEM mesure l'inclinaison du plan COB sur le plan AOB; c'est l'angle B du triangle ACB. L'angle CDM mesure l'inclinaison du plan ACO sur le plan AOB; c'est l'angle A du triangle ACB. Les deux angles réunis DCM, ECM Fig. 151.

forment l'angle DCE dans la pyramide sphérique $ACBO$, et la ligne CM est une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle C sur le plan qui lui est opposé.

Des points C, A, abaissons les perpendiculaires CD, AG, CE sur les côtés OA, OB : soit le rayon de la sphère $OC = 1$; CD est le sinus de l'arc CA, OD en est le cosinus; AG est le sinus de l'arc AB, OG en est le cosinus ; CE est le sinus de l'arc BC, OE en est le cosinus : la perpendiculaire CM est le sinus de l'angle CEM, ou ABC, en prenant CE pour rayon ; elle est le sinus de l'angle CDM, ou CAB, lorsqu'on prend CD pour rayon. On aura donc,

1°. $CM = \sin. BC \times \sin. B$... 2°. $CM = \sin. CA \times \sin. A$ donc $\sin. BC \times \sin. B = \sin. CA \times \sin. A$; d'où on tire la proportion $\sin. A : \sin. B :: \sin. BC : \sin. CA$. C. Q. F. D.

385. (n) *Théorême deuxième.* Le cosinus d'un côté BC d'un triangle ABC est égal au produit des cosinus des deux autres côtés AC, AB, plus au produit de leurs sinus, multiplié par le cosinus de l'angle A compris entre les deux côtés AC, AB.

Fig. 161. Car on a $OE = OH + HE$: mais OH est le cosinus de l'angle AOB, ou de l'arc AB, en prenant OD pour rayon, et $OD = \cos. CA$; donc $OH = \cos. CA \times \cos. AB$.... $HE = MN$ est le sinus de l'angle MDN, DM étant le rayon, mais $MDN = AOB$ (173) et $DM = \sin. CA \times \cos. A$; donc $HE = \sin. CA \times \sin. BA \times \cos. A$: donc on a $\cos. BC = \cos. AB \times \cos. AC + \sin. AB \times \sin. AC \times \cos. A$.

On trouvera aussi par un calcul semblable les deux équations suivantes :

$$\cos. CA = \cos. AB \times \cos. BC + \sin. AB \times \sin. BC \times \cos. B$$
$$\cos. AB = \cos. BC \times \cos. CA + \sin. BC \times \sin. CA \times \cos. C.$$

Si le triangle ABC avoit quelque angle obtus, tel que A, par exemple, le cosinus de cet angle seroit négatif (356), et par conséquent le terme multiplié par le cosinus seroit négatif; et dans cette supposition, le cos. BC seroit nécessairement négatif, si les deux côtés adjacens AB, AC ne sont pas de même espèce.

386. *Scholie.* Au moyen de ces trois équations, qui contiennent celle qui a été démontrée dans le théorême précédent, on résoudra facilement toutes les questions qui peuvent se proposer dans la trigonométrie sphérique : car trois choses étant données, on aura trois équations contenant trois inconnues; ainsi on pourra déterminer chacune, excepté dans le cas où elles doivent rester indéterminées, par la nature de la question (390).

387. Ces formules se simplifient beaucoup, si le triangle sphérique est rectangle. En effet, supposons que l'angle A soit droit : la proposition démontrée dans le premier théorême donne Fig. 164.

$$1 : \sin. B :: \sin. BC : \sin. CA....$$

ou $$\sin. CA = \sin. B \times \sin. BC...(1).$$

en faisant $\cos. A =$ zéro, on a

$$\cos. BC = \cos. BA \times \cos. AC...(2).$$

Substituant cette valeur dans les deux autres formules, on a $\cos. CA = \cos.^2 AB \times \cos. CA + \cos. BA \sin. BC \times \sin. AB$: d'où on déduit

$$\cos. CA \times \sin. AB = \sin. BC \times \cos. B... \quad (a)$$
$$\cos. AB \times \sin. CA = \sin. BC \times \cos. C... \quad (b)$$

L'équation (1) divisée par l'équation (a), donne

$$\frac{\sin. B}{\cos. B} = \frac{\sin. AC}{\cos. AC \times \sin. AB},$$

ou $$\frac{\sin. AB}{1} = \frac{\text{tang.} AC}{\text{tang.} B} = \frac{\cot. B}{\cot. AC} \ldots\ldots (3)$$

L'équation (b) divisée par l'équation (2), donne

$$\frac{\cos. C}{1} = \frac{\text{tang.} AC}{\text{tang.} BC} \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

L'équation (b) divisée par l'équation (1), donne

$$\frac{\cos. AB}{1} = \frac{\cos. C}{\sin. B} \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Si l'on met l'angle C pour l'angle B dans l'équation (3), elle deviendra $\frac{\sin. AC}{1} = \frac{\text{tang.} AB}{\text{tang.} C}$.

Cette équation multipliée par l'équation (3), donne

$$\text{tang.} B \times \text{tang.} C = \frac{\text{tang.} AC \times \text{tang.} AB}{\sin. AC \times \sin. AB}$$

$$= \frac{1}{\cos. AC \times \cos. AB} = \frac{1}{\cos. BC} (\text{équation } 2),$$

ou $$\frac{\cos. BC}{1} = \frac{\cot. B}{\text{tang.} C} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

388. Ces six analogies suffisent pour la résolution des triangles sphériques rectangles.

L'équation (5) nous apprend que si cos. C est positif, cos. AB est aussi positif (car les sinus seront toujours positifs (356)) ; et si cos. C est négatif, cos. AB sera négatif ; c'est-à-dire, que dans un triangle sphérique rectangle, l'angle et le côté opposé sont toujours de même espèce, tous les

deux aigus, ou tous les deux plus grands que 90^d.

389. On voit encore par l'équation (2) que si les deux côtés AB, AC sont de même espèce; ou tous les deux aigus, ou tous les deux obtus, le produit de leur cosinus sera toujours positif, et par conséquent l'hypoténuse (*) sera toujours aiguë; et s'ils sont de différente espèce, l'un aigu, l'autre obtus, le produit de leurs cosinus sera toujours négatif; et par conséquent l'hypoténuse sera plus grande que 90^d.

On voit par l'équation (6) que si les deux angles B et C sont de même espèce, l'hypoténuse sera aiguë; et s'ils sont d'espèce différente, l'hypoténuse sera plus grande que 90^d (356).

Il suit de l'équation (4) que si l'hypoténuse et un des côtés sont de même espèce, l'autre côté, avec son angle opposé, sont nécessairement aigus. Si l'hypoténuse et un côté sont d'espèce différente, l'autre côté et l'angle qui lui est opposé seront plus grands que 90^d.

390. Puisque dans les triangles sphériques rectangles, les angles et les côtés sont toujours de même espèce, il s'ensuit que $\frac{\text{tang. } AC}{\text{tang. } B}$ sera toujours positif : donc dans l'équation (3), sin. AB sera toujours positif, de même que sin. AC, dans l'équation (1). Car les sinus des arcs moindres que 180^d, sont toujours positifs (356). Mais les sinus des arcs AB, AC sont les mêmes que ceux de leurs supplémens. Donc, dans un triangle rectangle, étant

(*) On entend par hypoténuse, le côté opposé à l'angle droit.

donné un angle B, et son côté opposé AC, on ne pourra connoître les côtés adjacens, à moins qu'on ne sache s'ils sont aigus ou obtus. C'est à quoi se réduisent tous les cas douteux dans les triangles rectangles.

Résolution des triangles sphériques rectangles.

391. Dans un triangle sphérique rectangle ABC, l'angle droit A est toujours connu : donc si des cinq choses restantes (trois côtés et deux angles) on en connoît deux, on pourra résoudre le problême (*Algèbr. 79*) au moyen des six analogies précédentes (1).

Or sur cinq quantités données, on peut en supposer deux connues, et une inconnue de trente manières différentes (2), donc la résolution générale des triangles sphériques rectangles comprend trente cas particuliers ; mais comme dans ce nombre il y en a plusieurs qui demandent les mêmes calculs, on peut les réduire à seize analogies différentes.

---

(1) Les six analogies dérivent des trois équations (2), (a), (b), comme nous l'avons vu ; on a donc trois équations et trois inconnues, ce qui suffit pour résoudre un problême.

(2) Les deux quantités qu'on suppose connues parmi les cinq, peuvent être, 1°. la première et la seconde ; 2°. la première et la troisième ; 3°. la première et la quatrième ; 4°. la première et la cinquième ; 5°. la seconde et la troisième ; 6°. la seconde et la quatrième ; 7°. la seconde et la cinquième ; 8°. la troisième et la quatrième ; 9°. la troisième et la cinquième ; 10°. la quatrième et la cinquième ; mais dans chacune de ces combinaisons, on peut demander la valeur de chacune des trois quantités inconnues ; il y aura donc en tout trente combinaisons.

Table

Table des analogies qui satisferont aux seize cas des triangles rectangles.

392. *Première analogie.* Connoissant les deux côtés AC, AB, trouver l'hypoténuse BC. Fig. 164.

L'équation (2) donne la proportion

$$1 : \cos. AB :: \cos. AC : \cos. BC.$$

Deuxième analogie. Connoissant les deux côtés AC, AB, trouver l'angle B.

L'équation (3) donne la proportion

$$1 : \sin. AB :: \cot. AC : \cot. B.$$

Pour trouver l'angle C, on auroit

$$1 : \sin. AC :: \cot. AB : \cot. C.$$

Troisième analogie. Connoissant un côté AC, et l'angle adjacent C, trouver l'hypoténuse BC.

L'équation (4) donne la proportion

$$1 : \cos. C :: \cot. AC : \cot. BC.$$

Si l'on eût connu le côté AB et l'angle B, on auroit eu la proportion

$$1 : \cos. B :: \cot. AB : \cot. BC.$$

Quatrième analogie. Connoissant un côté AB et l'angle adjacent B, trouver le côté AC.

L'équation (3) donne la proportion

$$1 : \text{tang}. B :: \sin. AB : \text{tang}. AC.$$

On a aussi; $1 : \text{tang}. C :: \sin. AC : \text{tang}. AB.$

Cinquième analogie. Connoissant un côté AB et l'angle adjacent B, trouver l'autre angle C.

L'équation (5) donne la proportion

$$1 : \cos. AB :: \sin. B : \cos. C.$$

On a aussi; $1 : \cos. AC :: \sin. C : \cos. B.$

Sixième analogie. Connoissant l'hypoténuse BC et un côté AB, trouver l'angle C opposé au côté connu.

L'équation (1) donne la proportion

$$\sin. BC : 1 :: \sin. AB : \sin. C.$$

On a aussi; $\sin. BC : 1 :: \sin. AC : \sin. B.$

Septième analogie. Connoissant l'hypoténuse BC et un côté AC, trouver l'angle adjacent C.

L'équation (4) donne la proportion

$$\text{tang. } BC : \text{tang. } AC :: 1 : \cos. C.$$

On a aussi; $\text{tang. } BC : \text{tang. } AB :: 1 : \cos. B.$

Huitième analogie. Connoissant l'hypoténuse BC et un côté AB, trouver le troisième côté AC.

L'équation (2) donne la proportion

$$\cos. AB : 1 :: \cos. BC : \cos. AC.$$

On a aussi; $\cos. AC : 1 :: \cos. BC : \cos. AB.$

Neuvième analogie. Connoissant l'hypoténuse BC et un angle C, trouver l'autre angle B.

L'équation (6) donne la proportion

$$1 : \cos. BC :: \cot. C : \text{tang. } B.$$

On a aussi; $1 : \cos. BC :: \cot. B : \text{tang. } C.$

Dixième analogie. Connoissant l'hypoténuse BC et l'angle B, trouver le côté AC opposé à cet angle.

L'équation (1) donne la proportion

$$1 : \sin. BC :: \sin. B : \sin. AC.$$

On a aussi; $1 : \sin. BC :: \sin. C : \sin. AB.$

Onzième analogie. Connoissant l'hypoténuse BC et l'angle C, trouver le côté adjacent AC.

L'équation (4) donne la proportion

$1 : \cos. C :: \text{tang.} BC : \text{tang.} AC.$

On a aussi; $1 : \cos. B :: \text{tang.} BC : \text{tang.} AB.$

Douzième analogie. Connoissant les deux angles B, C, trouver l'hypoténuse BC.

L'équation (6) donne la proportion

$\text{tang.} C : \text{tang.} B :: 1 : \cos. BC.$

Treizième analogie. Connoissant les deux angles B, C, trouver les côtés AC, BC.

L'équation (5) donne la proportion

$\sin. B : 1 :: \cos. C : \cos. AB.$

On a aussi; $\sin. C : 1 :: \cos. B : \cos. AC.$

Quatorzième analogie. Connoissant un côté AC et l'angle opposé B, trouver l'hypoténuse BC.

L'équation (1) donne la proportion

$\sin. B : \sin. AC :: 1 : \sin. BC.$

On a aussi; $\sin. C : \sin. AB :: 1 : \sin. BC.$

Ce cas est douteux (390).

Quinzième analogie. Connoissant un côté AC et l'angle opposé B, trouver l'autre côté AB.

L'équation (3) donne la proportion

$\cot. AC : \cot. B :: 1 : \sin. AB$ } douteux.

On a aussi; $\cot. AB : \cot. C :: 1 : \sin. AC$ }

Seizième analogie. Connoissant un côté AB et son angle opposé C, trouver l'autre angle C.

L'équation (5) donne la proportion

$\cos. AB : 1 :: \cos. C : \sin. B$ } douteux.

On a aussi; $\cos. AC : 1 :: \cos. B : \sin. C$ }

Des triangles sphériques obliquangles.

393. Lorsque le triangle sphérique ABC ne contient pas d'angle droit, on peut le diviser en deux triangles rectangles, au moyen d'un arc perpendiculaire BD, abaissé du sommet d'un angle B sur le côté qui lui est opposé. Cet arc perpendiculaire est un côté commun aux deux triangles rectangles ABD, CBD. Ces deux triangles, comparés entre eux, fournissent six propriétés qui suffisent pour résoudre toutes les questions qui peuvent se présenter dans un triangle obliquangle.

Fig. 162.

Résolution de deux triangles sphériques rectangles ayant un côté commun.

394. Soit le triangle sphérique obliquangle ABC. Du sommet d'un angle B, abaissez l'arc perpendiculaire BD, cet arc tombera sur le côté opposé AC, ou sur son prolongement CD; les deux triangles rectangles ABD, CBD, ou abd, cbd, auront un côté commun BD, ou bd.

L'équation (1) donnera

$\sin. BD = \sin. A \times \sin. AB = \sin. C \times \sin. BC$; d'où on déduit $\sin. A : \sin. BC :: \sin. C : \sin. AB$.... proposition déjà démontrée (384).

L'équation (3) donne

$$\sin. \frac{BD}{1} = \frac{\text{tang. } AD}{\text{tang. } ABD} = \frac{\text{tang. } DC}{\text{tang. } DBC} . (7).$$

La même équation donne

$\text{tang.} BD = \text{tang.} A \times \sin. AD = \text{tang.} C \times \sin. DC$...(8);

L'équation (2) donne......................

$$\frac{\cos. BD}{1}=\frac{\cos. AB}{\cos. AD}=\frac{\cos. BC}{\cos. CD} \ldots\ldots (9).$$

L'équation (5) donne

$$\frac{\cos. BD}{1}=\frac{\cos. A}{\cos. ABD}=\frac{\cos. C}{\sin. CBD} \ldots\ldots (10).$$

L'équation (4) donne

$$\text{tang.}BD=\text{tang.}AB\times\cos.ABD=\text{tang.}BC\times\cos.CBD (11).$$

Résolution des triangles sphériques obliquangles.

395. Sur six parties dont est composé un triangle sphérique obliquangle, on en peut supposer trois connues de vingt manières différentes: dans chacune de ces vingt combinaisons, on peut demander la valeur de chacune des trois parties du triangle qui restent inconnues, ce qui donnera 60 cas pour la résolution des triangles sphériques obliquangles. Mais comme il y en a plusieurs de semblables, on peut réduire à douze toutes les questions qui se présentent, dans un triangle sphérique obliquangle.

396. Les trois parties connues peuvent être, 1°. les trois côtés; 2°. deux côtés et l'angle compris; 3°. deux côtés, et un angle opposé à un des côtés connus; 4°. les trois angles; 5°. deux angles et le côté compris entre ces deux angles; 6°. deux angles, et un côté opposé à un des angles connus. Ces six cas particuliers donneront la solution des douze problêmes qui peuvent se présenter. Avant de les résoudre, il ne sera pas inutile de fixer un

moment l'attention sur la position de l'arc perpendiculaire, qui tantôt tombe sur la base, comme *BD*, tantôt sur son prolongement, comme *bd*.

Fig. 162. 397. Lorsque l'arc perpendiculaire tombe sur la base, elle est divisée en deux segmens *AD*, *CD*; l'angle opposé *B* est partagé en deux parties *ABD*, *CBD*, qu'on nomme *angles verticaux*. Si la perpendiculaire tombe au-dehors du triangle, la somme des deux segmens *ad*, *cd* ne sera pas égale au côté *ac*, mais ce sera leur différence. Pareillement, la somme des deux angles verticaux *abd* ne sera pas égale à l'angle donné *abc*, mais ce sera leur différence.

398. On a plusieurs manières de distinguer si la perpendiculaire *OD* tombe hors du triangle ou sur la base; cela dépend de la position du point d'où elle part, relativement aux parties connues du triangle. Quelques auteurs la font tomber, tantôt dans l'angle donné, tantôt dans son supplément; ce qui occasionne de la confusion et du doute sur la valeur des segmens et des angles verticaux. Rivard a choisi de la faire tomber toujours dans l'angle aigu, ce qui n'a pas remédié à l'inconvénient d'avoir tantôt la somme, et tantôt la différence des angles verticaux ou des segmens. Delambre oppose toujours l'arc perpendiculaire à l'angle donné. On s'épargnera la considération de l'arc perpendiculaire, en observant seulement les règles des signes pour les cosinus, tangentes, cotangentes, en se souvenant que pour un angle obtus, le cosinus, la tangente et la cotangente sont négatives. Cette règle est particulièrement adoptée par Cagnoli; elle fait connoître, indépendamment de la position de l'arc perpendiculaire, si l'angle ou le segment est obtus ou aigu; et faute d'y avoir eu égard, plusieurs bons auteurs ont donné des règles qui ne sont

pas toujours exactes. Passons à la résolution des douze problèmes annoncés.

399. *Premier cas.* Etant donnés les trois côtés du triangle ABC, déterminer un angle quelconque.

Pour trouver tel angle qu'on voudra, l'angle A, par exemple, j'ai recours aux formules trouvées (385). Elles donnent immédiatement

$$\cos. A = \frac{\cos. BC - \cos. AB \times \cos. AC.}{\sin. AB \times \sin. AC}.$$

Cette formule, quoique très-simple, n'est pas la plus commode pour le calcul numérique; nous allons en donner une autre. On déduit de celle-là

$$1 - \cos. A =$$

$$\frac{\sin. AB \times \sin. AC + \cos. AB \cos. AC - \cos. BC}{\sin. AB \times \sin. AC.} =$$

$$\frac{\cos. (AB - AC) - \cos. CB}{\sin. AB \times \sin. AC} =$$

$$2\frac{\sin. \frac{1}{2}(BC - (AB - AC)) \times \sin. \frac{1}{2}(BC + (AB - AC))}{\sin. AB \times \sin. AC.}$$

Mais $1 - \cos. A = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} A$ (note 10), donc on a

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin. \frac{1}{2}(BC + AC - AB) \times \sin. \frac{1}{2}(BC + AB - AC)}{\sin. AB \times \sin. AC}$$

Cette formule est plus commode pour le calcul des logarithmes.

400. *Deuxième cas.* Etant donnés deux côtés AB, AC, et l'angle compris A, déterminer le troisième côté BC.

La même formule (385) donne,

$\cos. BC = \cos. AB \times \cos. AC + \sin. AB \times \sin. AC \times \cos. A$
$= \cos. AB \times \cos. AC (1 + \text{tang}. AB \times \text{tang}. AC \times \cos. A.)$

2°. Etant donnés les deux côtés AB, AC, et l'angle compris A, déterminer l'angle C opposé à un des côtés connus.

Du sommet B de l'autre angle inconnu, abaissez l'arc perpendiculaire BD. Cet arc tombera sur la base AC, ou sur son prolongement. Calculez le segment AD par l'équation (4).

$$\text{tang}. AD = \cos. A \ \text{tang}. AB.$$

Ce premier segment est plus grand que 90^d, si l'angle A, et le côté AB sont de différente espèce (389): La différence entre la base et le premier segment donnera le second DC: on aura ensuite l'angle C, par l'équation (8) $\text{tang}. C = \text{tang}. A \times \frac{\sin. AD}{\sin. DC}$.

3°. Pour calculer le troisième angle B, on abaissera l'arc perpendiculaire du sommet de l'angle C sur le côté AB.

401. *Troisième cas.* Etant donnés deux côtés AB, AC, et un angle C opposé à un des côtés connus, déterminer l'angle B opposé à l'autre côté connu.

La formule démontrée (384), donne immédiatement, $\sin. B = \frac{\sin. C \times \sin. AB}{\sin. AC}$.

2°. Pour trouver le troisième côté BC, on abaissera l'arc perpendiculaire AF sur le côté cherché BC; on aura ensuite.....

1°. $\text{tang}. CF = \cos. C \times \text{tang}. AC$... (éq. 4).

2°. $\cos. BF = \cos. CF \times \frac{\cos. AB}{\cos. AC}$... (éq. 9).

3°. $CF \pm BF = BC$.

3°. Pour trouver l'angle A, compris entre les côtés donnés, on abaissera du sommet de cet angle l'arc perpendiculaire AF, et l'on aura

1°. cot. $CAF =$ cos. $AC \times$ tang. C..... (éq. 6).

2°. $\cos. BAF = \cos. CAF \times \frac{\text{tang. } AC}{\text{tang. } AB}$... (éq. 11).

3°. $CAF \pm BAF = A$.

402. *Quatrième cas.* Etant donnés les trois angles A, B, C, déterminer les trois côtés.

L'on aura recours au triangle polaire ou supplémentaire DFE, dans lequel on connoîtra les trois côtés (300), on aura donc :

$$\cos. F = -\frac{\cos. FD \times \cos. FE + \cos. DE}{\sin. FD \times \sin. FE},$$

ou $\cos. (180 - AB) = \cos. (180 - C) - \cos. (180 - B) \times \cos. (180 - A)$.

Cette équation donne

$$\cos. AB = \cos. C + \cos. B \times \cos. A.$$

403. *Cinquième cas.* Etant donnés deux angles A, C, et le côté compris AC, trouver un des côtés inconnus AB.

Du sommet A d'un angle connu, on abaissera la perpendiculaire AF, sur le troisième côté BC, et l'on aura les analogies suivantes ;

1°. cot. $CAF =$ cos. $AC \times$ tang. C..... (éq. 6.).

2°. $BAF = CAF - A$.

3°. $\text{tang.} AB = \text{tang.} AC \times \frac{\cos. CAF}{\cos. BAF}$.. (éq. 11).

2°. Pour connoître le troisième angle B, on a

1°. cot. $CAF =$ cos. $AC \times$ tang. C... (éq. 6.)

2°. $BAF = CAF - A$.

3°. $\cos. B = \cos. C \times \frac{\sin. BAF}{\sin. CAF} \ldots$ (éq. 10).

404. *Sixième cas.* Etant donnés deux angles B, C, et un côté AB, opposé à un angle donné, déterminer le côté AC opposé à l'autre angle connu.

La formule (384) donne directement

$$\sin. AC = \frac{\sin. B \times \sin. AB}{\sin. C}.$$

2°. On déterminera le côté BC, compris entre les deux angles connus par le moyen des analogies suivantes.

1°. $\text{Tang. } CF = \text{tang. } AC \times \cos. C \ldots$ (éq. 4).

2°. $\text{Sin. } BF = \sin. CF \times \frac{\text{tang. } C}{\text{tang. } B} \ldots$ (éq. 8).

3°. $BC = CF \pm BF$.

3°. On détermine le troisième angle A par les analogies suivantes.

1°. $\text{Cot. } CAF = \cos. AC \times \text{tang. } C \ldots$ (éq. 6).

2°. $\text{Sin. } BAF = \sin. CAF \times \frac{\cos. B}{\cos. C} \ldots$ (éq. 10).

3°. $A = CAF \pm BAF$.

Application des formules précédentes à la résolution de quelques problêmes.

405. Les formules de la trigonométrie sphérique, trouvent leur application dans l'astronomie, la géographie, la gnomonique, la navigation, les opérations géodésiques pour connoître la figure de la terre... &c. Le petit nombre de problêmes suivans suppose les lecteurs initiés dans ces différentes sciences; ceux qui ne les connoîtront pas feront abstraction des principes, et se borneront à étudier les opérations analytiques.

406. *Problême premier.* Connoissant le lieu du soleil sur l'écliptique, trouver son ascension droite et sa déclinaison.

Soit C, le lieu du soleil sur l'écliptique; l'arc de l'équateur AB est l'ascension droite, BC est la longitude, et l'arc du méridien AC est la déclinaison : l'angle A est droit; on connoît de plus l'angle ABC qui est l'obliquité de l'écliptique $=$ $23^\circ\ 28'$: Il est question de trouver AB, et AC... connoissant l'angle B, et l'hypoténuse BC. Fig. 121.

L'éq.(1) donne $\sin.\ AC = \sin.\ B \times \sin.\ BC$...(6ᵉ anal.)
L'éq.(4) donne $\text{tang.}\ AB = \cos.\ B \times \text{tang.}\ BC$...(11ᵉ anal.)

Exemple. On suppose la longitude du soleil de $2^{sig.}\ 28^d\ 48'\ 30''$ et l'on demande, 1°. sa déclinaison, 2°. son ascension droite : l'on aura, 1°. log. sin. $AC = \log.\ \sin.\ 23^d\ 28' + \log.\ \sin.\ 88^d\ 48'\ 30''$

$$\begin{array}{l} = 9{,}6001181 \\ + \ 9{,}9999061 \\ \hline 9{,}6000242 = \log.\ \sin.\ 23^d\ 27'\ 45'' \end{array}$$

2°. Log. tang. AB = log. cos. 23^d 28′ + log. tang. 88^d 48′ 30″

= 9,9625076
+ 1,6819052

1,6444128 = log. tang. 88^d 42′ 5″.

Fig. 121. 407. *Problême deuxième.* Connoissant la déclinaison du soleil, trouver sa position dans l'écliptique, et son ascension droite :

La question est réduite à trouver, 1°. BC, 2°. AB, étant donnés AC, et l'angle B.

L'éq. (1) donne sin. $BC = \frac{\sin. AC}{\sin. B}$...(14e. anal.)

L'éq. (3) donne sin. $AB = \frac{\cot. B}{\cot. AC}$...(15e. anal.)

Exemple. La déclinaison du soleil étant de 23^d 27′ 40″, on demande sa longitude et son ascension :

On a, 1°. log. sin. BC = log. sin. 23^d 27′ 40″ — log. sin. 23^d 28′

= 9,6000242
— 9,6001181

9,9999061 = log. sin. 88^d 48′ 30″.

2°. Log. sin. AB = log. cot. 23^d 28′ — log. cot. 23^d 27′ 45″

= 0,3623894
— 0,3625010

9,9998884 = log. sin. 88^d 42′ 5″.

Fig. 120. 408. *Problême troisième.* L'élévation du pole étant donnée, on demande la durée du plus grand

jour d'été astronomique, c'est-à-dire sans avoir égard au crépuscule, et à la réfraction.

Soit PZ la distance du pole au zénith, ZS' le complément de la hauteur du soleil à l'horizon = par conséquent 90^d; PS' complément de la déclinaison $= 66^d\ 32'$. La question est réduite à trouver l'angle ZPS', connoissant les trois côtés. On aura recours à la formule démontrée (385) : mais un des côtés du triangle étant de 90^d, cette circonstance la rend beaucoup plus simple; elle se réduit à $0 =$ $\cos. PZ \times \cos. PS' + \sin. PZ \times \sin. PS' + \cos. P$, d'où on déduit : $\cos. P = - \cot. PZ \times \cot. PS' =$ $-$ tang. *lat.* $\times$ tang. *decl.*

Exemple. Je suppose la latitude de $44^d\ 21'$... On a log. cos. $P = -$log. cot. $45^d\ 39'$ $-$log. cot. $66^d\ 32'$.

$$= 9{,}9901874$$
$$+\ 9{,}6376196$$

$9{,}6278070$ = log. cos. $64^d\ 53'\ 5''$; et parce que ce cosinus doit être négatif, on prendra le supplément de $64^d\ 53'\ 5'' = 115^d\ 6'\ 55''$. Cet angle converti en temps à raison de 15^d par heure, donne $7^h\ 40'\ 27''$; et doublant $15^h\ 20'\ 54''$.

409. *Problème quatrième.* L'élévation du pole, et la déclinaison étant connues, déterminer l'heure qu'il est par la hauteur du soleil. Fig. 110.

Dans le triangle PSZ on connoît PZ, c'est le complément de la latitude; le côté ZS est le complément de la hauteur du soleil; et PS est le complément de la déclinaison. On trouvera l'angle horaire ZPS par l'analogie (399)

$$\sin.\tfrac{1}{2}P = \sqrt{\left[\frac{\sin.\frac{1}{2}(ZS+PS-PZ)\times\sin.\frac{1}{2}(ZS+PZ-PS.)}{\sin. PS \times \sin. PZ.}\right]}$$

Exemple. On suppose la hauteur du pole

de $48^d\ 50'$, la hauteur du soleil de 60^d, la déclinaison de 20^d, et l'on demande l'heure qu'il est.

On a $PZ = 41^d\ 10' \ldots ZS = 30^d \ldots PS = 70 \ldots$

On aura donc... $\log. \sin. \frac{1}{2} P = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{2}(\log.\sin. 29^d..25' + \text{l}. \sin. 35' - \log.\sin. - 70^d - \log.\sin. 41°10')$

$= \frac{1}{2}(9{,}6912205 + 8{,}007867 - 19{,}7913777)$

$= 8{,}4488147 = \log. 1^d 36' 38''$. Donc $P = 3^d\ 13'\ 16''$.

Cet arc converti en temps à raison de 15^d par heure donne $12'\ 53''$. C'est-à-dire qu'il s'en faut de $12'\ 53''$ de temps que le soleil ne soit au méridien : il est donc $11^h\ 47'\ 7''$.

Fig. 163. 410. *Problème cinquième.* Etant donné l'angle ARr, on demande sa réduction au plan AEe, où les points E, e des lignes verticales RE, re, sont supposées à la même distance du centre de la terre que le point A.

Du point A je mesure la distance au zénith de chaque point R, r. Elle sera le complément des angles d'élévation RAE, rAe; l'angle RAr étant connu, sera mesuré par l'arc Rr, lequel sera par conséquent connu. L'angle de réduction EAe sera égal à l'angle sphérique RZr.

La question est donc réduite à trouver un angle sphérique lorsqu'on connoît les trois côtés. Problême exactement le même que le précédent.

Fig. 162. 411. *Problème sixième.* La latitude de deux villes étant connue, ainsi que leur différence en longitude, on demande leur distance mutuelle, en supposant la terre sphérique.

Soit B le pole de la terre, A une des villes, C l'autre. Dans le triangle ABC, on connoîtra les côtés BC, BA, qui sont les complémens de la latitude, et l'angle B compris entre les deux côtés connus, et qui est la différence de longitude : on déterminera donc AC par l'éq. (400). Cet arc converti en my-

riamètres, à raison de 11,106 myriamètres par degré, donnera à-peu-près la distance cherchée.

Exemple. On demande la distance de Paris à Constantinople.

On sait que la latitude de Paris est de $48^d\ 50'$, celle de Constantinople de $41^d\ 1'$, la différence de longitude $26^d\ 36'$. On aura donc $BA = 41^d\ 10'$.... $BC = 48^d\ 59'$. L'angle $B = 26^d\ 36'$, et l'équation

$$\cos. AC = \cos. BC \times \cos BA$$
$$(1 + \text{tang. } BC \times \text{tang. } BA \times \cos.\ B)$$

deviendra $\cos. AC = \cos.\ 48^d\ 59' \times \cos.\ 41^d\ 10'$
$(1 + \text{tang. } 48^d\ 59' \times \text{tang. } 41^d\ 10' \times \cos.\ 26^d\ 36')$

Log. de tang. $48^d\ 59' = 10,0606818$
Log. de tang. $41^d\ 10' = 9,9417135$
Log. de cos. $26^d\ 36' = 9,9514424$

$- 1,9537077 = \log.\ 0,8989$

donc le coefficient de cos. $48^d\ 59' \times \cos.\ 41^d\ 10' = 1,8989$
Log. de cos. $48^d\ 59' = 9,8170882$
Log. de cos. $41^d\ 10' = 9,8766785$
Log. de $1,8989 = 0,2785021$

$9,9722688 = \log. \cos.\ 20^d\ 15' 30''$

donc l'arc $AC = 20^d\ 15'\ 30'' = 225^{\text{myriamètres}}$, à-peu-près.

Exemple second. Quelle est la distance sur le globe de Paris au Caire?

La latitude du Caire est $30^d\ 3'$: la différence de longitude est $29^d\ 10'$: donc, $1 + \text{tg. } 41^d\ 10' \times \text{tg. } 59^d\ 57' \times \cos.\ 29^d\ 20' = 2,32$; log. cos. $AC = 9,9417922 = \log.\ 29^d\ 25' = 322^{\text{myriamètres.}}$

412. (p) *Problème septième.* Déterminer l'in-

clinaison de deux faces adjacentes dans les cinq polyèdres réguliers.

Solution. Chaque angle solide d'un polyèdre régulier quelconque peut être considéré comme formé par la réunion de trois angles plans déterminés. En effet,

Fig. 142. 1°. Dans le tétraèdre, chaque angle solide est formé de trois angles de triangles équilatéraux, qui sont par conséquent de 60^d chacun.

Fig. 130. 2°. Dans l'hexaèdre, chaque angle solide est formé par la réunion de trois angles de 90^d chacun.

Fig. 129. 3°. Dans l'octaèdre on peut former un angle solide par la réunion de deux angles de triangles équilatéraux, et d'un angle droit.

Fig. 131. 4°. Dans le dodécaèdre chaque angle solide est formé par la réunion de trois angles de pentagones réguliers de 108^d chacun.

Fig. 132. 5°. Enfin, dans l'icosaèdre on peut former un angle solide par la réunion de deux triangles équilatéraux, et d'un pentagone (1). Cela posé,

Pour déterminer l'inclinaison de chaque face d'un polyèdre régulier sur la face adjacente, on n'a qu'à chercher un angle d'un triangle sphérique dont les trois côtés sont connus; on aura donc, en appelant A l'inclinaison des deux faces adjacentes (399), $\cos. A = \frac{\cos. BC - \cos. AB \times \cos. AC}{\sin. AB \times \sin. AC}$.

Mais comme les trois angles qui forment l'angle solide

(1) On ne peut espérer de comprendre bien ce qui regarde les polyèdres réguliers, qu'en ayant sous les yeux les mêmes polyèdres construits en bois ou en carton. Leurs figures dessinées sur un plan ne donneront qu'une idée bien imparfaite de la position respective des angles solides et des faces à celui qui ne les aura jamais vues en relief.

solide sont égaux, ou au moins les deux qui comprennent l'inclinaison des faces adjacentes, il s'ensuit que dans l'équation ci-dessus, on aura $BC = AB = AC$, ou au moins $AB = AC$, ce qui facilite le calcul.

Ainsi dans le tétraèdre, l'hexaèdre, et le dodécaèdre, on a $\cos. A = \cos. BC \left\{ \frac{1 - \cos. BC}{1 - \cos.^2 BC} \right\} = \frac{\cos. BC}{1 + \cos. BC}$. Cette formule peut être rendue plus simple (*Voyez note 15*).

Dans l'octaèdre, on a $\cos. BC = 0$, et $\cos. AB = \cos. AC$; donc $\cos. A = -\cot.^2 AB$.

Dans l'icosaèdre $\cos. AB = \cos. AC = \cos. 60^d = \frac{1}{2}$; donc $\cos. A = \frac{4 \cos. BC -}{3}$.

NOTES.

(*a*) *Note Ire*, n°. 8, page 4.

QUOIQUE les principes énoncés dans le n°. 8 soient assez évidens par eux-mêmes, pour être mis au rang des axiomes, il ne sera peut-être pas inutile de leur donner un peu plus de développement, ce qui rendra leur évidence plus facile à saisir.

Le principe premier est celui de *la superposition*, c'est la huitième maxime (*sententiæ*) d'Euclide. Ce principe ne consiste pas, comme l'ont prétendu quelques Géomètres, à appliquer grossièrement une figure sur une autre, pour en conclure l'égalité des deux; mais il consiste à imaginer une figure transportée sur une autre, et à conclure, 1°. de l'égalité supposée des parties données, la coïncidence de ces parties; 2°. de cette coïncidence, celle du reste de la figure, et par conséquent l'égalité totale, et la similitude parfaite des deux figures. Ce principe est d'un grand usage dans les élémens de géométrie. On peut en voir l'application dans les théorêmes qui concernent l'égalité des triangles.

Le principe deuxième est la *réduction à l'absurde* (*Euclide, liv. 10, prop. 2 et suiv.*). L'application de ce principe consiste à démontrer la vérité d'une proposition, en faisant voir que si cette proposition n'étoit pas vraie, une supposition faite, ou une proposition déjà démontrée seroit fausse, ce qui seroit *absurde*. Cette manière de démontrer,

quoique indirecte est très-rigoureuse : on ne peut guère en employer d'autre pour la plupart des propositions qui regardent les incommensurables : on en peut voir des exemples dans *Euclide*, *liv. 10*, dans *Legendre*, et dans presque tous les livres élémentaires.

Le principe troisième sert de fondement à la méthode d'*exhaustion* des anciens géomètres (*Euclide*, *Archimède*). Cette méthode consiste à faire voir que deux ou plusieurs grandeurs sont égales, quand leur différence est plus petite que toute grandeur assignable. On conçoit en effet que si les deux grandeurs étoient inégales, leur différence pourroit être assignée : si au contraire la différence supposée entre deux grandeurs est si petite qu'elle échappe, non-seulement aux sens, mais encore à l'imagination, il faut nécessairement qu'elle soit zéro, et que par conséquent les deux grandeurs comparées soient égales.

C'est d'après ce principe qu'on démontre que si un polygone régulier d'une infinité de côtés est inscrit ou circonscrit à un cercle, l'espace qui constitue la différence entre le cercle et le polygone *s'épuisera*, et deviendra zéro.

Les principes quatrième et cinquième découlent naturellement de la définition de la grandeur, qui peut être augmentée ou diminuée à l'infini, c'est-à-dire, au-delà de tout terme assignable.

Le n°. VI est la définition de la limite, plutôt qu'un principe : nous avons eu occasion de l'expliquer plusieurs fois dans l'Arithmétique et l'Algèbre. Nous avons fait voir (*Arith. 163*, *et Algèb. 122*) que l'unité est la limite de la progression géométrique décroissante à l'infini $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdots \frac{1}{2^\infty}$, et il est utile de remarquer que pour qu'une grandeur soit la limite d'une autre grandeur, il est nécessaire

que celle-ci puisse ne différer de la première, que d'une quantité moindre que toute grandeur donnée: sans cette dernière condition, 2 pourroit être regardé comme la limite de la progression citée, puisqu'il seroit vrai de dire que plus on prendroit de termes dans cette suite, plus on approcheroit de 2; mais parce que la somme des termes ne pourra jamais atteindre 1, il s'ensuit que sa différence avec 2 sera toujours > 1, et par conséquent ne sera pas moindre que toute grandeur donnée. C'est dans le sens qu'on verra que le cercle est la limite des polygones inscrits et circonscrits, puisqu'en augmentant le nombre des côtés des polygones, ils s'approcheront toujours du cercle de plus en plus, et pourront en différer aussi peu qu'on voudra; mais jamais rigoureusement ils ne se confondront avec lui.

Le principe septième est une conséquence nécessaire de la notion que nous venons de donner de la limite. On conçoit en effet que si Z et X sont les limites d'une même grandeur Y, on doit avoir $Z = X$: car s'il y avoit entre ces deux valeurs quelque différence D, on auroit $Z = X \pm D$; mais par la définition de la limite, la quantité Y peut approcher des quantités Z et X aussi près qu'on voudra, sans néanmoins jamais coïncider avec elles, et par le fait la différence de Y à X seroit toujours $> D$; donc X ne seroit pas la limite, ce qui seroit contre la supposition.

Le principe huitième est une suite de la loi de continuité. On le trouve énoncé dans la deuxième proposition du livre 12 des Elémens d'Euclide. Il y démontre que si on inscrit deux polygones semblables, deux hexagones par exemple dans deux cercles différens, et qu'en augmentant également le nombre des côtés des deux polygones, le rap-

port de leurs surfaces reste égal au quarré des diamètres des cercles circonscrits, le rapport invariable sera celui des surfaces des deux cercles.

Enfin, le sens du principe neuvième est que si on a un produit XY de deux grandeurs X, Y, que a soit la limite de X, et b la limite de Y, ab, produit des limites, sera nécessairement égal à la limite du produit XY; car supposons que X soit représenté généralement par $a \pm x$, et Y par $b \pm y$, le produit sera $ab \pm ay \pm bx + xy$; mais puisque X peut approcher de a, et Y de b, jusqu'à n'en différer qu'aussi peu qu'on voudra, il s'ensuit que x et y peuvent devenir moindres que toute grandeur assignable, ou zéro; donc à la limite, XY sera ab: or, a est la limite de X, et b est la limite de Y; donc la limite du produit de deux facteurs sera égale au produit des limites des mêmes facteurs.

La même chose auroit lieu si le produit étoit composé de trois, ou d'un plus grand nombre de facteurs XYZ.....

C'est sur ces derniers principes qu'est fondée toute la méthode des limites, qui sert elle-même de base au calcul infinitésimal. Pour faciliter l'intelligence de ce calcul, il est utile d'en faire remarquer les premiers germes dans les vérités élémentaires qu'il convient toujours de démontrer suivant les méthodes les plus générales. C'est pour cette raison que l'on a employé la méthode des limites pour la mesure du cercle, les solidités de la pyramide, de la sphère.... etc. malgré les longueurs que cette méthode entraîne. (*Voyez le Journal de l'Ecole Normale, tom. IV.*)

(*b*) *Note II*, n°. 161, page 56.

Les lignes, les surfaces, les solides dont on s'occupe en géométrie, sont des quantités comparables entr'elles, et dont on peut par conséquent assigner les rapports d'une manière générale. Il ne s'agit que de représenter les lignes par les caractères algébriques, et de former les équations résultantes de leurs rapports, qui le plus souvent sont donnés par les propriétés des triangles semblables ou rectangles, et par celles du cercle.

Descartes est le premier qui ait essayé d'appliquer l'algèbre à la géométrie; et par cette tentative heureuse, il a donné la clef des grandes découvertes qu'on a faites, et qu'on peut espérer de faire dans les mathématiques. On conçoit en effet que dès qu'on aura traduit en langage algébrique une propriété générale des lignes, on peut faire sur cette expression plusieurs opérations sans songer aux lignes ni à la figure que les caractères algébriques représentent.

Dans la solution des questions géométriques, une ou plusieurs lignes que les équations renferment sont des inconnues, dont on détermine la valeur, par les méthodes que l'algèbre fournit pour la résolution des équations : on construit ensuite ces valeurs, c'est-à-dire, que l'on assigne par des procédés géométriques les lignes qui leur sont égales.

Comme on peut représenter les lignes géométriques par des lettres, on peut aussi représenter par des lignes les valeurs numériques que les lettres expriment. En sorte qu'on peut dire généralement qu'il n'y a pas d'équation algébrique qu'on ne

puisse construire géométriquement; et réciproquement il n'y a pas de rapport exprimé en lignes qu'on ne puisse mettre en équation. Les propriétés démontrées des lignes proportionnelles et du cercle suffisent pour construire les expressions qui ne renferment que des racines quarrées.

Avant d'en faire l'application, nous allons traduire ces propriétés générales en langage algébrique.

Théorème 165. Si le côté AX et sa partie AR sont incommensurables, après avoir porté successivement la partie AR sur AX, le premier reste sur AR... etc. et avoir obtenu la partie Am commensurable avec AR, on peut représenter les deux côtés du triangle AX, AY par A, B; les deux parties AR, AS par a, b; les restes Xm, Yn par R, r. La proportion démontrée entre les parties commensurables, pourra se traduire ainsi $A - R : B - r :: a : b$. On tire de cette proportion $\frac{A}{a} - \frac{B}{b} = \frac{R}{a} - \frac{r}{b}$. Fig. 69.

La commune mesure entre AR, et la partie commensurable de AX pouvant être prise aussi petite qu'on veut, R et r peuvent être moindres que toute grandeur assignable; donc la différence $\frac{A}{a} - \frac{B}{b}$ peut être plus petite qu'aucune grandeur donnée: or, deux quantités, dont on peut prouver que la différence est moindre qu'une grandeur donnée sont égales entr'elles (3); donc on a $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$, ou $A : B :: a : b$.

Théorème 175. Si l'on représente l'hypoténuse BC par h, les côtés AB, AC par a, b, et le segment BD par m, la première proportion sera

Fig. 92. exprimée algébriquement par... $h : a :: a : m$; donc $hm = a^2$; la seconde donnera pareillement $h : b :: b : h - m$; donc $h^2 - hm = b^2$. Ajoutant les deux équations, on a $h^2 = a^2 + b^2$.

De cette équation on déduit les trois suivantes, 1°. $h = \sqrt{a^2 + b^2}$... 2°. $a = \sqrt{h^2 - b^2}$.. 3°. $b = \sqrt{h - a^2}$; d'où il suit que si deux côtés quelconques d'un triangle rectangle sont connus, on pourra déterminer le troisième.

Si on représente par y la perpendiculaire AD, la troisième proportion donnera $m : y :: y : y - m$; donc $y^2 = my - m^2$.

Si le triangle ABC n'étoit pas rectangle, du point C, abaissez la perpendiculaire CD sur le côté BA prolongé.

Fig. 159. Soit cette perpendiculaire $= y$ et la partie $AD = m$: on aura $\overline{BC}^2 = \overline{BA} + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$, ou algébriquement $h^2 = a^2 + 2am + m^2 + y^2$; mais $m^2 + y^2 = \overline{AC}^2 = b^2$; donc $h^2 = a^2 + b^2 + 2am$.

$AD = m$ est le cosinus de l'angle CAB, ou CAD, en prenant $AC = b$ pour rayon (158); donc si on désigne cet angle par φ, on pourra mettre b cos. φ à la place de m, et pour lors on aura $h^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ cos. φ... c'est-à-dire, que le quarré du plus grand côté surpasse la somme des quarrés faits sur chacun des deux autres de la quantité exprimée par $2ab \cos \varphi$.

Fig. 160. Si l'angle A étoit aigu, on auroit $BD = BA - AD = a - m$, et $\overline{BC}^2 = h^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ cos. φ, c'est-à-dire, que le quarré d'un côté opposé à un angle aigu est moindre que la somme des quarrés faits sur chacun des deux autres côtés de la quantité exprimée par $2ab \cos \varphi$. (Ce sont les deux propositions 12 et 13 d'Euclide, liv. 2.)

On déduit de ces deux propositions le théorème suivant.

Dans un rhombe quelconque, la somme des quarrés des deux diagonales est égale à la somme des quarrés des quatre côtés. Fig. 168.

Car les deux angles intérieurs ADC, DAB sont supplémens l'un de l'autre; donc ils ont le même cosinus aux signes près, et les côtés parallèles sont égaux.

Donc en nommant la grande diagonale D, la petite d, les côtés AB, $DC = a$, BC, $AD = b$, on aura,

$$D^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos. \varphi$$
$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. \varphi$$

On aura donc $D^2 + d^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2$.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un autre plus général qu'on peut énoncer ainsi.

Dans tout quadrilatère $ABCD$, la somme des quarrés des quatre côtés est égale à celle des quarrés des deux diagonales, plus quatre fois le quarré de la ligne FE qui joint les milieux de ces diagonales. Fig. 171.

Soient les côtés $AB = a$.. $BC = b$.. $CD = c$.. $DA = d$; soit φ l'angle formé en O. Faisons $AO = m$.. $CO = n$.. $BO = p$.. $DO = q$.. $FE = r$. Les quatre angles formés en O par l'intersection des deux diagonales auront le même cosinus, parce qu'ils sont égaux deux à deux, et que les deux aigus sont supplémens des deux obtus.

Les théorêmes que nous venons de démontrer, fourniront les équations suivantes,

$$a^2 = m^2 + p^2 + 2mp \cos. \varphi$$
$$b^2 = p^2 + n^2 - 2np \cos. \varphi$$
$$c^2 = n^2 + q^2 + 2nq \cos. \varphi$$
$$d^2 = m^2 + q^2 - 2mq \cos. \varphi$$

Donc $a^2+b^2+c^2+d^2=2m^2+2n^2+2p^2+2q^2+2\cos.\varphi\,(mp-np+nq-mq)$.

Ce dernier terme peut se mettre sous la forme suivante $(q-p)(n-m)\,2\cos.\varphi$; mais si $BO=p$, et $OD=q$, $OE=\frac{q-p}{2}$ et $OF=\frac{n-m}{2}$, parce que de deux grandeurs inégales la plus petite égale la moitié de la somme, moins la demi-différence; donc on aura,

$$r^2=\left(\frac{q-p}{2}\right)^2+\left(\frac{n-m}{2}\right)^2+\left(\frac{q-p}{2}\right)\left(\frac{n-m}{2}\right)$$

$2\cos.\varphi$... et $(q-p)(n-m)\,2\cos\varphi=4r^2-q^2+2pq-p^2-m^2+2mn-n^2$. Substituant cette valeur et réduisant, on a $a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+2mn+n^2+p^2+2pq+q^2+4r^2=(m+n)^2+(p+q)^2+4r^2$.

Si le quadrilatère devient un rhombe ou parallélogramme, les deux diagonales se coupent en deux parties égales, et pour lors on a $r=o$, ce qui est le cas déjà examiné dans le théorême précédent.

(c) *Note III*, n°. 179, page 64.

Fig. 77. Des propriétés du triangle rectangle, on peut déduire celle des lignes droites considérées dans le cercle; car, 1°. il sera toujours possible d'inscrire un triangle rectangle dans un cercle (113); 2°. l'hypoténuse du triangle sera égale au diamètre du cercle circonscrit (107); donc si on représente le diamètre du cercle par $2a$, la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence sur le diamètre par y, et le segment BD du dia-

mètre par x, la propriété du triangle rectangle, énoncée dans la note précédente, sera exprimée ainsi, $x : y :: y : 2a - x$; donc $y^2 = 2ax - x^2$.

Si l'on représente par m, n les deux cordes BA, CA, on aura aussi par la même raison $2a : m :: m : x$... ou $2ax = m^2$ et $2a : n :: n : 2a - x$... ou $4a^2 - 2ax = n^2$, c'est-à-dire, que les cordes AB, AC sont chacune moyennes proportionnelles entre le diamètre du cercle et le segment adjacent.

Les deux triangles rectangles BAD, DAC donneront les équations $m^2 = y^2 + x^2$... $n^2 = y^2 + (2a - x)^2$. Ces équations combinées entr'elles, selon les règles de l'analyse, feront connoître les propriétés du cercle.

Cherchons, par exemple, la distance d'un point quelconque A de la circonférence au centre P..., on aura $\overline{AP}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DP}^2 = y^2 + \overline{a - x}^2 = 2ax - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = a^2$; donc $AP = a$... c'est-à-dire, que tous les points A de la circonférence sont à égale distance du centre, ce qui est la propriété distinctive du cercle.

On pourroit démontrer par le moyen de l'analyse les théorêmes (n°. 181, 182); mais le calcul est trop compliqué pour pouvoir trouver ici sa place. Nous nous contenterons d'en donner ici la traduction algébrique.

(N°. 181). Soit la ligne entière $BA = a$, la corde Fig. 78, 79.
$DC = b$; la partie $FA = m$, $FC = n$; donc la partie $FB = a - m$, et la partie $FD = b - n$. La proposition démontrée, donnera l'équation $am - m^2 = bn - n^2$; et pour trouver m ou n, on aura à résoudre une équation du deuxième degré.

Si le point de rencontre étoit extérieur, comme

on le voit (*fig.* 79), on mettroit $a+m$ pour $a-m$, et $b+n$ pour $b-n$, et on auroit la propriété des sécantes (n°. 182), $am+m^2=bn+n^2$; ainsi les deux proportions ne diffèrent, qu'en ce que les deux cordes AB, CD au lieu de se couper dans le cercle, se coupent en dehors.

La tangente FM est la limite de la sécante FC; mais lorsque FC est à sa limite, la partie intérieure est zéro; donc en faisant $b=$ zéro dans l'expression précédente, on aura la propriété de la tangente $am+m^2=n^2$... ou $a+m:n::n:m$.

(*Fig.* 83). Soit $AB=a$... $BC=b$... $CD=c$... $DA=d$... $BD=m$... $AC=n$, on a, 1°. $ac+bd=mn$... 2°. $ab+cd:bc+ad::n:m$.

Ces deux derniers théorêmes servent à déterminer les diagonales d'un quadrilatère inscrit, lorsqu'on connoît les quatre côtés.

Les propriétés des lignes proportionnelles, considérées entr'elles, et dans le cercle, suffisent pour construire les expressions rationnelles, ou qui ne renferment que des racines quarrées, c'est-à-dire, les équations du premier et du second degré.

Note IV, n°. 187, page 67.

Construction géométrique des équations du premier et du deuxième degré.

Avant de construire une expression algébrique, il faut observer si elle est homogène, et de quelle dimension elle est. L'expression sera homogène, lorsque tous les termes dont elle est composée auront le même nombre de dimensions, ou le même nombre de facteurs simples comme a^2b+bcd... $ab+bc-em$.... $x+y$.... La première est de

trois dimensions, la seconde de deux, et la troisième d'une.

Si l'expression est fractionnaire, le nombre de ses dimensions s'estime par la différence entre le nombre des dimensions du numérateur et du dénominateur. Par exemple, $\frac{a^3 + b^3}{a + b}$ est de deux dimensions.... $\frac{a^5 + bcxy^4}{b^4 + be^3}$ est d'une seule dimension.

Le nombre des dimensions du numérateur peut surpasser celui de chaque terme du dénominateur, d'une, de deux, ou de trois unités : s'il le surpasse d'une unité, la fraction algébrique sera l'expression d'une ligne S'il le surpasse de deux, la fraction sera l'expression d'une surface, et s'il le surpasse de trois, elle sera l'expression d'un solide. On sent bien pourquoi il ne peut pas le surpasser de quatre ou de cinq unités, à moins que quelque ligne n'ait été prise pour unité de comparaison ; mais comme on n'entreprend jamais de construire sans connoître les élémens que l'on emploie pour cette construction, on sait toujours dans chaque cas quelle est la quantité qu'on a supposée égale à l'unité.

Une expression dans laquelle la loi des homogènes ne seroit pas observée, seroit une expression absurde, parce qu'elle supposeroit des rapports entre des quantités de nature différente entre des lignes et des surfaces, des surfaces et des solides, des lignes, des surfaces et des solides.

Pour construire une expression du premier degré, il suffit de réduire en proportion la fraction qui exprime la valeur de l'inconnue, comme on va le voir dans les exemples suivans.

Fig. 21. 1°. Supposons qu'on ait à construire l'équation $x = \frac{ab}{c}$. On prendra sur la ligne AE une partie $AD = c$, sur la ligne AB une partie $= b$.... sur AF une partie $= a$: on tirera par le point D la ligne DH, et par le point C la parallèle CI, et l'on aura AI, ou $x = \frac{ab}{c}$.

2°. Si l'on a l'expression $x = \frac{abc}{df}$, on construira d'abord $\frac{ab}{d}$ par la méthode précédente ; et après avoir trouvé une ligne égale à $\frac{ab}{d}$, on la nommera r, et on construira de nouveau l'expression $x = \frac{cr}{f}$.

3°. Si l'on a à construire $\frac{abc + mnp + qrs}{dg}$; on construira séparément $\frac{abc}{dg} + \frac{mnp}{dg} + \frac{qrs}{dg}$; et la somme des trois lignes représentées par ces trois fractions, sera la ligne demandée.

4°. Si l'on a $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$, on remarquera que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; donc on pourra faire la proportion $c : a + b :: a - b : x$. Ainsi pour avoir x, il faudra chercher une quatrième proportionnelle aux trois lignes c, $a + b$, $a - b$.

5°. Si le numérateur et le dénominateur étoient complexes comme $\frac{a^2 b + bcd}{am + bn}$, on peut concevoir chaque terme du numérateur divisé par f^2, f étant une ligne prise à volonté.

On construira séparément $\frac{a^2 b}{f^2}$, $\frac{bcd}{f^2}$, et l'on aura ainsi une ligne h égale au numérateur divisé par f^2. On cherchera par les mêmes procédés une ligne l, égale à tous les termes du dénominateur divisés par f. La fraction proposée sera réduite à $\frac{hf}{l}$... On construira cette expression, et l'on aura une ligne égale à la fraction proposée.

Cette méthode réussira toujours quels que soient le numérateur et le dénominateur de la fraction.

Supposons, par exemple, que le numérateur est de la dimension n, et le dénominateur de la dimension $n-1$. On peut concevoir le numérateur divisé par f^{n-1}, f étant une ligne prise à volonté. Chaque terme de ce numérateur devient de la première dimension, et l'on détermine la ligne qu'il représente par les proportionnelles. On aura donc ainsi une ligne h égale à la somme de tous les termes du numérateur divisés par f^{n-1}. On aura pareillement une ligne l égale à la somme de tous les termes du dénominateur divisés par f^{n-2}, et la fraction proposée sera réduite à $\frac{hf}{l}$.

Au reste, il est rare qu'en pareil cas on ait besoin de construction très-compliquée. Souvent même on les obtient par des procédés plus simples que par les méthodes précédentes.

Par exemple, si l'on a à construire $x=\frac{m^2b-mnb}{mf+bc}$, on cherchera une ligne égale à $\frac{mf}{b}$: on fera ensuite $\frac{mf}{b}+c=h$, ce qui donnera $mf+bc=bh$,

et par conséquent $x = \frac{m^2 - mn}{h}$. Donc $h : m ::$ $m - n : x$.

Si l'expression algébrique à construire étoit de deux dimensions, c'est-à-dire, si le nombre de dimensions de chaque terme du numérateur surpassoit de deux unités celui des termes du dénominateur, alors la quantité exprimeroit une surface.

Soit, par exemple, $x = \frac{a^2 mn}{m^2 + n^2}$. On cherchera une ligne h, telle que $h^2 = m^2 + n^2$. On cherchera de nouveau une ligne $l = \frac{h^2}{m}$, et l'on aura à construire $\frac{a^2 n}{l}$. Le rapport de $n : l$ étant connu, $\frac{n}{l}$ sera un nombre abstrait, et x égalera le quarré représenté par a^2, répété autant de fois qu'il y a d'unités dans $\frac{n}{l}$. Ou si l'on veut réduire cette expression en un rectangle, on cherchera une ligne $= r = \frac{an}{l}$, et l'on aura $\frac{a^2 mn}{m^2 + n^2} = ar =$ un rectangle dont la base est a, et la hauteur r.

Enfin, si le nombre des dimensions du numérateur surpassoit celui du dénominateur de trois, alors l'expression désigneroit un solide. Par exemple, si l'on avoit à construire l'expression $x = \frac{ab^3 + a^3 b}{a + b}$, on la mettroit sous la forme suivante: $x = ab\left(\frac{a^2 + b^2}{a + b}\right)$. On chercheroit une ligne $h = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$, et pour lors

x

$x = abh$, c'est-à-dire, un prisme rhomboïdal dont la base est ab, et la hauteur h.

Construction des quantités radicales.

1°. Soit $x = \sqrt{be}$. En élevant les deux membres au quarré on a $x^2 = be$. Donc $b : x :: x : e$; ce qui annonce que pour trouver une ligne égale à x, il faut chercher une moyenne proportionnelle entre b et e (190).

2°. Soit $x = \sqrt{ab + bc} = \sqrt{b(a+c)}$. On prendra une moyenne proportionnelle entre b et $a + c$.

3°. Soit $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. On construira un triangle rectangle dont un des côtés $= a$, le second côté $= b$, et l'hypoténuse sera la valeur de x.

Si $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, on construira pareillement un triangle rectangle dont a soit l'hypoténuse, et b un des côtés : le troisième côté sera la valeur de x.

4°. Soit $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. On fera $AB = a$, $CA = b$, et l'on aura $\overline{CB}^2 = a^2 + b^2$. On élèvera sur CB la perpendiculaire $CD = c$, et l'on aura $\overline{DB}^2 = a^2 + b^2 + c^2$: on élèvera sur DB la perpendiculaire $DF = d$, et l'on aura.... $\overline{BF}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Donc $BF = x$. Fig. 166.

S'il y avoit des quarrés négatifs, on commenceroit par construire les quarrés positifs, et après avoir trouvé une ligne dont le quarré m^2 fût égal à leur somme, on chercheroit une seconde ligne dont le quarré n^2 soit égal à la somme des quarrés négatifs. On construiroit ensuite l'expression $\sqrt{m^2 - n^2}$, ce qui donneroit la valeur de x.

5°. Soit l'expression $x = \sqrt{a^2 + b^2 + cd - fg}$. On commencera par chercher une ligne m moyenne

proportionnelle à cd, et une ligne n moyenne proportionnelle à fg. On aura ainsi $cd=m^2$ et $fg=n^2$. Donc $x=\sqrt{a^2+b^2+m^2-n^2}$, qui se construira par le moyen du triangle rectangle.

6°. Si l'expression étoit $x=\sqrt{\left(a^2+\frac{b^2c^2-dfgh}{ab+cd}\right)}$, on commenceroit par chercher une ligne m dont le quarré fût égal à $\frac{b^2c^2-dfgh}{ab+cd}$, ce que l'on obtiendroit facilement par ce que nous avons dit au commencement de cette note. On auroit ainsi $x=\sqrt{a^2+m^2}$ qui est facile à construire.

7°. Si l'expression à construire contenoit des radicaux, comme dans $x=\sqrt{pq+g\sqrt{p^2+m^2}}$, on prendroit une ligne $n=\sqrt{p^2+m^2}$, et l'on auroit à construire $x=\sqrt{pq+gn}$: on chercheroit séparément une moyenne proportionnelle à p, q, et g, n: soient ces deux moyennes proportionnelles a et b, on aura $x=\sqrt{a^2+b^2}$, quantité facile à construire.

8°. Soit $x=\sqrt[4]{a^3 b}$. On cherchera d'abord une moyenne proportionnelle m entre a et b, et l'on aura $m^2=ab$; donc $x=\sqrt[4]{a^2 m^2}=\sqrt[2]{a\,m}$. Si l'on avoit $x=\sqrt[8]{a^4 b^2 c^2}$, on pourroit chercher une moyenne proportionnelle m entre b et c, l'on auroit $m^2=bc$ et par conséquent $m^4=b^2c^2$. Donc $x=\sqrt[8]{a^4 m^4}=\sqrt[2]{a\,m}$.

On peut donc, en suivant les procédés indiqués dans cette note, déterminer en lignes les expressions algébriques qui renferment des radicaux quarrés, et même des radicaux dont l'exposant est une puissance de 2. Ainsi la racine de toute équation du

second degré peut être construite au moyen du cercle et de la ligne droite, c'est-à-dire, avec la règle et le compas.

En effet, l'équation $x^2 - px = \pm q^2$, qui peut représenter toutes celles du second degré (*Algèb.* 90), étant résolue, donne $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} \pm q^2}$. Toute la difficulté consistera à construire $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2}$, ou $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$. Pour le premier cas on fera comme dans les constructions précédentes $AB = \frac{1}{2}p$, et $AC = q$, et l'on aura $CB = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2}$.... Dans le second cas on fera $BC = \frac{p}{2}$, et $AC = q$, et l'on aura, $AB = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$.

Appliquons ces principes à la résolution de quelques problêmes de géométrie.

Problême premier. Par un point A pris dans l'intérieur d'un angle SCR, tirer une ligne $BAD = a$, telle que les segmens AB, AD soient entr'eux dans le rapport de $m : n$. Fig. 169.

Puisqu'un des points A par où doit passer la ligne est donné, il suffit de déterminer le point B ou le point D. Par le point A je mène parallèlement à BC la ligne $AF = b$. Je fais $BD = x$. On aura d'abord la proportion $BD : AD :: m + n : n$, ou $AD = \frac{an}{m+n}$. En second

lieu $AD:AF::BD:BC.$; ou $\frac{an}{m+n}:b::a:x.$

Donc $x=\frac{b(m+n)}{n}$.

Pour construire cette expression, on prendra sur CD prolongée une ligne $CR=n$; sur CB, une seconde ligne $cS=m+n$; sur CD une troisième ligne $CF=b$; on tirera la ligne RS, et par le point P la parallèle PB : elle déterminera sur la ligne CS le point B tel que CB ou $x=\frac{b(m+n)}{m}$.

Problême deuxième. Inscrire un quarré $ABCD$ dans un triangle donné MNP.

Fig. 176. Puisque le triangle est donné, on connoît sa hauteur PR, que nous appellerons a, la base $MN=b$; il est évident que si nous connoissions RS égal au côté du quarré, nous aurions tout ce qu'il faut pour décrire le quarré proposé. Soit donc $RS=x$. Les deux triangles semblables MNP, DCP donnent la proportion $MN:DC::PR:PS$, ou $b:x::a:a-x$; donc $x=\frac{ba}{a+b}$.

Pour construire cette expression, on prendra sur RM prolongée une ligne $RL=a+b$: par les points L et P on mènera la ligne LP; on prendra de nouveau sur RM la ligne $RQ=b$, par le point Q on mènera la parallèle QS, elle ira couper la ligne RP au point S, tel que RS ou $x=\frac{ab}{a+b}$.

Problême troisième. Etant donnés les trois côtés du triangle ABC, déterminer les segmens AD, DC formés par la perpendiculaire BD.

Fig. 151. Soient les côtés $AB=a$, $BC=b$, $AC=d$;

la perpendiculaire $BD=y$; le segment $AD=x$; le segment $DC=d-x$.

Le triangle rectangle ABD donnera l'équation $\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2$, ou $a^2 = x^2 + y^2$. Le triangle rectangle BDC donnera l'équation $b^2=y^2+d^2-2dx+x^2$. Retranchons la seconde de la première, on aura $a^2-b^2+d^2=2dx$. Donc $x=\frac{a^2-b^2+d^2}{2d}$, quantité facile à construire.

L'équation que nous venons de trouver peut aussi se mettre sous la forme suivante $b^2-a^2=d^2-2dx$, ou ce qui est la même chose $(b+a)(b-a)=d(d-2x)$, d'ou l'on tire la proportion suivante, $d:b+a::b-a:d-2x$; c'est-à-dire, $AC:AB+BC::MC:NC$, ce qui est le théorême démontré géométriquement (166).

Problême quatrième. Diviser la ligne AB en deux parties, de manière que la plus grande partie soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie.

Soit la ligne totale $AB=a$, $AF=x$, $FB=a-x$, Fig. 84.
on aura la proportion $a:x::x:a-x$; donc $x^2=a^2-ax$. Résolvant cette équation du second degré, on a $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$; on construira cette expression en prenant la ligne $BA=a$. Au point B on élèvera perpendiculairement $BC=\frac{BA}{2}$, et l'on formera le triangle ABC. L'hypoténuse $CA=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}a^2}$ du rayon $BC=\frac{1}{2}a$, on décrira un cercle et l'on aura GA ou $FA=-\frac{1}{2}a+\sqrt{a^2+\frac{1}{4}a^2}$. Ce qui est le problême cinquième de géométrie (81).

Problème cinquième. Connoissant les quatre côtés du quadrilatère inscrit dans un cercle, trouver les deux diagonales.

Fig. 85. Le dernier article, note 3, donne les deux équations... $ac+bd=mn, (ab+cd)\,n=(ad+bc)\,m$...

Dono $n=m\left(\frac{ad+bc}{ab+cd}\right)$ et $m^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$.

Donc $m=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$, et

$n=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$. Expressions faciles à construire par le moyen de la ligne droite et du cercle.

(e) *Note V*, n°. 227, page 84.

En représentant par x le côté du polygone régulier inscrit dans le cercle qui a r pour rayon, et par n le nombre des côtés du polygone, on aura $\frac{nx}{r}$ pour le rapport du contour du polygone au rayon; plus n augmentera, plus $\frac{nx}{r}$ approchera du rapport de la circonférence du cercle au rayon, sans pouvoir jamais lui être égal, mais dont il peut approcher aussi près qu'on veut; donc le second rapport sera la limite du premier. Nommons 2π cette limite. La circonférence du cercle qui aura r pour rayon sera exprimée par $2\pi r$. Soit u la partie du rayon comprise entre l'arc et le côté du polygone inscrit, l'expression algébrique de la surface du polygone,

sera $s = \frac{nx}{2}(r - u) = \frac{nx}{2r}(r^2 - ru)$, plus u diminuera, plus le polygone inscrit approchera du cercle, et plus l'expression algébrique approchera d'être égale à $\frac{2\pi r^2}{2}$, en sorte qu'elle lui sera rigoureusement égale lorsque $u = 0$; mais u n'est zéro qu'à la limite du polygone, c'est-à-dire lorsque le polygone se confond avec le cercle; donc la surface du cercle est égale à $2\pi r \frac{r}{2}$, c'est-à-dire au produit de la circonférence par la moitié du rayon.

(f) *Note VI*, n°. 235, page 88.

On peut résoudre, par le moyen de l'analyse, un grand nombre de problêmes intéressans, relatifs aux surfaces; il suffit pour cela de les mettre en équation : le moyen de les résoudre ne présente jamais de grandes difficultés.

Pour mettre les problêmes en équation, on se sert en général des propriétés déjà démontrées; mais le nombre des propositions vraiment nécessaires est assez limité; les principales dépendent de la similitude des triangles, de la propriété du triangle-rectangle, et des lignes droites considérées dans le cercle. En traduisant algébriquement une ou plusieurs de ces propriétés, on a soin de faire entrer dans l'expression des rapports les lignes inconnues qu'il s'agit de déterminer; mais le choix des inconnues n'est pas indifférent dans les problêmes géométriques. C'est de-là que dépend principalement la simplicité des solutions.

Nous allons rapporter la règle prescrite par Newton et par *Laplace*; (*Journal de l'Ecole Normale, tome 4.*) On la trouve aussi dans Bézout (*troisième Partie, page 225*).

Lorsque deux ou plusieurs inconnues sont déterminées par une même équation, il ne faut pas choisir l'une d'elles pour inconnue principale. On doit prendre pour cette inconnue une ligne qui ait un même rapport avec elles, telle que leur somme, ou leur différence, ou une moyenne proportionnelle. L'équation que l'on obtient alors est moins composée que celle qui détermine les inconnues du problême : elle en est une réduite plus facile à résoudre, et qui donne aisément les valeurs des inconnues. Supposons, par exemple, que la hauteur d'un triangle, sa base et la somme de ses côtés étant connues, on propose de déterminer chacun de ses côtés; il est clair que dépendant de la même manière des quantités connues, ils doivent être donnés par la même équation. Ainsi, au lieu de considérer l'un d'eux comme l'inconnue principale, il vaut mieux prendre pour cette inconnue leur différence.

On trouvera un grand nombre de problêmes géométriques résolus par l'algèbre, dans l'Arithmétique universelle de Newton, ouvrage digne de son illustre auteur, soit par les découvertes qu'il contient, soit par les artifices au moyen desquels les solutions des problêmes sont ramenées aux équations les plus simples.

J'ai pensé qu'on verroit ici avec plaisir quelques-uns de ces problêmes; mais avant d'en donner la solution, je dois démontrer un théorême d'Euclide qui leur sert de base, et qui en rend la solution plus simple que celle qu'on trouve dans Newton.

La proposition d'Euclide est : Soit un angle donné

dans un triangle, l'excès du quarré de la somme des deux côtés qui forment l'angle donné, sur le quarré du côté opposé à l'angle donné, est à la surface du triangle, comme la cotangente de la moitié de l'angle donné est au quart du rayon.

On a aussi, l'excès du quarré de la base sur le quarré de la différence des deux côtés qui forment l'angle, est à la surface du triangle, comme la tangente de la moitié de l'angle est au quart du rayon.

1°. Soit le triangle ABC, dans lequel l'angle donné est l'angle $A = \varphi$, on aura $a^2 + b^2 - h^2 = 2\,a\,b\cos.\ \varphi$ (note 2e). Ajoutons de part et d'autre $2\,a\,b$, l'équation deviendra $a^2 + 2\,a\,b + b^2 - h^2 = 2\,a\,b\,(1 + \cos\varphi)$, ou $\overline{a+b}^2 - h^2 = 2\,a\,b\,(1 + \cos.\ \varphi)$. Fig. 159.

La surface du triangle $ABC = BA \times \frac{CD}{2}$

Or, CD est le sinus de l'angle φ, lorsque AC est rayon; donc $CD = b\sin.\ \varphi$, donc la surface du triangle s, est $\frac{ab}{2}\sin.\ \varphi$ et $4\,s = 2\,a\,b\sin.\ \varphi$. Divisant la première équation par la seconde, on a $\frac{\overline{a+b}^2 - h^2}{4\,s} = \frac{1 + \cos.\ \varphi}{\sin.\ \varphi}$ Mais on verra (note 11) que $\frac{1 + \cos.\ \varphi}{\sin.\ \varphi} = \text{cotang.}\ \frac{1}{2}\varphi$. Donc $\overline{a+b}^2 - h^2 : s :: \text{cotang.}\ \frac{1}{2}\varphi : \frac{1}{4}$, ce qui est la proposition énoncée.

2°. Si, au lieu d'ajouter aux deux membres de l'équation $2\,a\,b$, on l'en eût retranché, on auroit eu $\frac{h^2 - (a-b)^2}{4\,s} = \frac{1 - \cos.\ \varphi}{\sin.\ \varphi}$; or cette dernière

expression est la tangente de la moitié de φ (note 12); donc on a $h^2-(a-b)^2 : s :: \text{tang.} \frac{1}{2} \varphi : \frac{1}{4}$.

Ce théorême va nous donner, d'une manière bien simple, la solution du problême suivant :

Trouver la surface d'un triangle dont on connoît les trois côtés.

Les deux formules que nous venons de trouver étant multipliées l'une par l'autre, donnent $(\overline{a+b}^2-h^2)(h^2-[a-b])^2=16s^2$, ou $s^2 =\left(\frac{a+b+h}{2}\right)\left(\frac{a+b-h}{2}\right)\left(\frac{h+a-b}{2}\right)\left(\frac{h+b-a}{2}\right)$.

Soit q la demi-somme des trois côtés, ou la moitié du perimètre du triangle, $a+b-h$ sera $2q-2h$.... $h+a-b=2q-2b$.... $h+b-a=2q-2a$; donc $s=\sqrt{q.q-h.q-b.q-a}$.

C'est-à-dire que pour avoir la surface d'un triangle dont on connoît les trois côtés, il faut prendre, 1°. la moitié du périmètre du triangle ; 2°. de cette moitié de périmètre, ôter successivement les trois côtés du triangle ; 3°. multiplier ensemble ces quatre quantités; 4.° extraire la racine quarrée du produit.

Passons aux problêmes de Newton.

Problême premier. (*4e de l'arithmétique universelle de Newton.*) Etant donnés un angle C, le périmètre et la perpendiculaire CD; décrire le triangle.

Fig. 159 et 160. Puisque la perpendiculaire CD est connue, la position de l'angle C au-dessus de BD est déterminée, et puisque l'angle C est donné, la position respective des deux lignes CB, CA est aussi déterminée. Enfin le périmètre étant donné, il est

visible que tout sera déterminé si l'on connoît un côté AB, parce qu'il n'existe pas deux triangles ayant même périmètre, même angle C, même perpendiculaire CD, et même côté déterminé AB.

Soit $AB + BC + CA = q$.... $CD = p$.... $AB = x$.... Donc $BC + CA = q - x$.... et $\overline{q - x}^2 - x^2 = q^2 - 2qx$.... La surface du triangle est $\frac{px}{2}$. Mais par la proposition démontrée, le rapport de $q^2 - 2qx : 2px$, est le même que celui de la tang. $\frac{\varphi}{2}$ au rayon : soit donc le dernier rapport $= m : 1$, on aura donc $q^2 - 2qx : 2px :: m : 1$, donc $x = \frac{q^2}{2mp + 2q}$, quantité facile à construire.

Pour décrire le triangle, on prendra la ligne MN. Par un point quelconque R, on élèvera la perpendiculaire RS, on tirera la parallèle SV; ensuite du rayon $PQ = \frac{BA}{2 \sin. C}$, on décrira un cercle qui passe par B et A, et des points C ou V, où le cercle coupe la parallèle SV, on mènera CB, CA. Le triangle CBA sera le triangle demandé.

Problême deuxième. (5e *de Newton.*) Etant donnés un angle C, le côté AB qui lui est opposé, la somme des deux autres côtés CB, CA et de la perpendiculaire CD, décrire le triangle.

Soit $AC + CB + CD = q$, $AB = b$.. $CD = x$... $AC + CB = q - x$. Donc $\overline{AC + CB}^2 - \overline{AB}^2 = q^2 - 2qx + x^2 - b^2$.. Le quadruple de la sur-

face du triangle $= 4 . \frac{AB.CD}{2} = 2bx$. La proposition demontrée donnera $q^2 - 2qx + x^2 - b^2 : 2bx :: m : 1$. Donc $x^2 - (2q + 2bm)\,x = b^2 - q^2$ et $x = q + bm \pm \sqrt{b^2(1+m^2) + 2bmq}$, quantité facile à construire. Cette perpendiculaire une fois connue, on a tout ce qu'il faut pour décrire le triangle.

Problême troisième. (6e *de Newton.*) Etant donnés l'angle C, la somme des côtés CB, CA qui le forment, et la perpendiculaire CD, décrire le triangle.

Soit $AC + CB = a \ldots CD = b \ldots AB = x \ldots$ On aura $\overline{AC + CB}^2 - \overline{AB}^2 = a^2 - x^2$, le quadruple de la surface du triangle sera $2bx$. Donc on aura $a^2 - x^2 : 2bx :: m : 1$. Donc $x^2 + 2bmx = a^2$, et $x = -bm \pm \sqrt{a^2 + b^2 m^2}$.

Problême quatrième. (7e *de Newton.*) Etant donnés l'angle C, la somme des côtés qui le forment CB, CA, la somme de la base AB, et de la perpendiculaire CD, décrire le triangle.

Soit $AC + CB = a \ldots AB + CD = b \ldots AB = x$. Donc $CD = b - x$. On aura $\overline{AC + CB}^2 - \overline{AB}^2 = a^2 - x^2$. Le quadruple de la surface du triangle $= 2x(b - x)$. Donc $a^2 - x^2 : 2bx - 2x^2 :: m : 1 \ldots$

$$x^2 + \frac{2bmx}{1 - 2m} = \frac{a^2}{1 - 2m} \text{ ou } x = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{-bm \pm \sqrt{a^2(1 - 2m) + b^2 m^2}}{1 - 2m}.$$

Problême cinquième. (8e *de Newton.*) Etant donnés l'angle C, la surface du triangle, et le périmètre, décrire le triangle.

Soit $AB + BC + CA = q \ldots BA = x \ldots$

$\frac{AB \times CD}{2} = a^2 \ldots AC + BC = q - x$, on aura donc $q^2 - 2qx : 4a^2 :: m : 1 \ldots$ et $x = \frac{q^2 - 4a^2m}{2q}$.

Problême sixième. (9[e] *de Newton.*) La base AB, la perpendiculaire CD, et la somme des deux côtés CA, CB étant données, décrire le triangle.

Soit $AB = a$, $CA + CB = p \ldots CD = b \ldots CB - CA = 2x \ldots$ on aura $\overline{BC + CA}^2 - \overline{AB}^2 = p^2 - a^2$. Et $\overline{AB}^2 - \overline{BC - CA}^2 = a^2 - 4x^2$ le quadruple de la surface du triangle $= 2ab$.

Par la première partie du théorême $p^2 - a^2 : 2ab :: m : 1$, et par la seconde $a^2 - 4x^2 : 2ab :: 1 : m$. Donc $(p^2 - a^2)(a^2 - 4x^2) = 4a^2b^2 \ldots$ Donc $x^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 b^2}{p^2 - a^2}$.

Problême septième. (10[e]. *de Newton.*) Etant donnés l'angle C, la somme des côtés qui le forment $CA + BC$, et la base AB, décrire le triangle.

Soit $AC + BC = a, \ldots AB = b \ldots CD = x \ldots$ on aura $\overline{AC + BC}^2 - \overline{AB}^2 = a^2 - b^2$, le quadruple de la surface $= 2bx$. Donc $a^2 - b^2 : 2bx :: m : 1$, et $x = \frac{a^2 - b^2}{2bm} \ldots$

On pourroit résoudre ces problêmes, et une infinité d'autres, en prenant pour inconnues d'autres lignes; mais les équations auxquelles on parviendroit seroient plus compliquées, et par conséquent plus difficiles à résoudre et à construire.

On voit par tous ces problêmes comment on représente les lignes géométriques par des lettres, ce qui est l'application de l'algèbre à la géométrie; mais on peut aussi représenter par des lignes, les

grandeurs numériques, c'est-à-dire, qu'on peut appliquer la géométrie à l'algébre. Cette application a l'avantage de rendre sensibles aux yeux les démonstrations des règles de l'algèbre, et peut servir à résoudre facilement des problêmes, dont la solution directe seroit très-difficile ou même impossible. Pour en donner quelques exemples:

Fig. 172. 1°. Soit $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: faisons un quarré dont les côtés soient égaux à la somme de deux lignes représentées par a et b. Tirant par les points de division, des lignes parallèles aux côtés du quarré, ce quarré se trouvera divisé en quatre surfaces, et l'on verra facilement qu'une de ces surfaces sera le quarré de $AB = a^2$; une autre le quarré de $BC = b^2$, les deux autres sont chacune un rectangle formé de $AB \times AC = 2ab$. (*C'est la Proposition quatrième d'Euclide, liv. 2.*)

Fig. 173. 2°. Soit $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Construisons un quarré sur $AB = a$, prenons $BC = b$ et tirons CD parallèle à BF. Les deux rectangles $PBAN$, $CBFD$ sont égaux chacun à $PB \times PN = 2ab$. Si on les retranche de $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + b^2$, il est visible qu'il restera le quarré $\overline{MN}^2 = (a-b)^2$. (*Euclide, Prop. 7.*)

Fig. 174. 3°. Soit $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; prenez la ligne $AB = a$ et $BC = b$, on a $AC = a + b$. De la hauteur $AD = a$ retranchez $DN = b$, et vous aurez $AN = a - b$, prenez $PM = BC$, le rectangle $ACGN = (a+b)(a-b)$; mais le même rectangle égale le quarré de AB moins le quarré de PM, à cause de $DMNP = BCGR$.... Donc le rectangle proposé $= a^2 - b^2$. (*Euclide, Prop. cinquième.*)

(g) *Note VII*, n°. 291, page 117.

On peut trouver par l'analyse la fraction continue qui est la racine de 2.

Soit l'équation $x^2=2$.. et $x=\sqrt{2}$. On sait que cette racine $=1$, plus une fraction. On aura donc $x=1+\frac{1}{y}$. Substituant cette valeur de x dans l'équation $x^2=2$, on aura $1+\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}=2$; donc $y^2-2y=1$, et $y=2+\frac{1}{y}$. Donc $x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}$ substituant successivement la valeur de y, on a...

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}}}}$$

(h) *Note VIII*, n°. 321, page 131.

Soit y le côté du polygone inscrit dans le cercle de la base du cône. Soient r le rayon, u la flèche, et z l'arrête de la pyramide inscrite. L'apothême sera $\sqrt{z^2-\frac{y^2}{4}}$; la surface latérale de la pyramide Fig. 125.
sera $\frac{ny}{2}\sqrt{z^2-\frac{y^2}{4}}$; mais par la propriété du cercle

on a $\frac{y^2}{4} = 2ru - u^2$. Donc la surface convexe de la pyramide inscrite est $S = \frac{ny}{2}\sqrt{z^2 - 2ru + u^2}$.

Pour avoir la limite de cette expression, il faut supposer $u = o$, et $ny = \pi r$. L'on aura pour lors $S = \frac{\pi r}{2} z$; mais le cône est la limite des pyramides, donc la surface du cône est égale à la moitié de la circonférence de la base par son apothême.

Fig. 124. Pour avoir la surface du cône tronqué, on cherchera d'abord celle du cône entier, on en retranchera ensuite celle du petit cône enlevé par le plan de section.

Soient z l'arête du cône entier, z' celle du cône tronqué, r le rayon du cercle de la base inférieure, r' le rayon du cercle de la base supérieure.

L'expression de la surface du cône tronqué sera $S' = \frac{\pi r z}{2} - \frac{\pi r'}{2}(z - z')$. Mais on a par les triangles semblables $z' : z : z - z' :: r - r' : r : r'$. Donc $z = \frac{z' r}{r - r'}$.... et $z - z' = \frac{z' r'}{r - r'}$, substituant ces valeurs $S' = \frac{\pi z'}{2}\left(\frac{r^2 - r'^2}{r - r'}\right) = \frac{\pi z'}{2}(r + r')$, c'est-à-dire, que la surface du cône tronqué est égale au produit de ce qui reste de l'apothême, par la demi-circonférence qui auroit pour rayon $r + r'$.

Fig. 128. L'expression algébrique de la surface de la sphère, sera celle de la limite du sphéroïde inscrit.

Soient r le rayon de la sphère, u la flèche, ou la partie du rayon de la sphère, comprise entre le côté du sphéroïde et la sphère. La surface du sphéroïde

sphéroïde inscrit sera $S = 2\pi r(r - u)$. Cette expression a pour limite $2\pi r^2$. Donc la surface de la sphère sera exprimée par $2\pi r^2$.

(h) *Note IX*, n°. 321, page 131.

La solidité du prisme excédent est égale à la somme des rectangles excédens de la base multipliée par la hauteur. Fig. 136.

Soit donc la hauteur commune $= h$, la base BAC du triangle $= a$. La hauteur de chaque tranche $Bb = b$; celle du triangle $= L$. Soit encore $ac = r$... $db = s$... n le nombre des tranches.

La solidité de la première tranche excédente sera abh.. Celle de la seconde tranche sera $abh - bh(r+s)$... Celle de la troisième tranche... $abh - 2bh(n+s)$... La somme de toutes les tranches excédentes sera $nbah - bh(r+s) \times \frac{n^2 - n}{2}$; mais $nb = L$; donc la somme $= aLh - Lh(r+s) \times \frac{n-1}{2}$.

Si le nombre des tranches est infini, ou plus grand que toute grandeur assignable, $n - 1$ deviendra n, b sera infiniment petit $(r+s)\frac{n}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$. Donc on a sol. $= aLh - \frac{aLh}{2} = \frac{aLh}{2}$, c'est-à-dire, égale au produit de la base par la moitié de la hauteur.

Pour la solidité du prisme oblique, supposons qu'il soit un rhomboïde, ou parallélepipède, dont la largeur de la base $MP = a$, la hauteur CM de chaque tranche $= b$, la hauteur du prisme $= h$, la profondeur $= L$. $Cb = dg = r$. Fig. 137.

La solidité de chaque tranche excédente étant $abL+\frac{rbL}{2}$, la solidité totale sera $nabL+nrbL$; mais lorsque la hauteur de chaque tranche est infiniment petite, le nombre des tranches est infini; $r=o$, et $nb=h$, donc la solidité sera aLh, c'est-à-dire, égale au produit de la base par la hauteur.

(i) *Note X*, n°. 329, page 138.

Voici comme on peut trouver analytiquement, et par la théorie des limites, la solidité de la pyramide triangulaire, en faisant usage des propositions 3... 4... 5 d'Euclide, livre 12.

Fig. 170. Soit $SABC$ la pyramide triangulaire proposée par le point b milieu de SB, faites passer la section abc parallèle à ABC, et la section bfe parallèle à SAC; menez ad parallèle à be, et joignez de.

Par cette construction la pyramide $SABC$ est partagée en deux pyramides triangulaires $Sabc$, $Bfbe$, et deux prismes triangulaires $abcdeC$, $Aadfbe$. Les deux pyramides partielles sont semblables à la pyramide totale, et de plus elles sont égales entr'elles; car elles ont même base, et même hauteur.

Les deux prismes partiels sont aussi égaux en solidité, car le premier a pour base le triangle abc, et pour hauteur la perpendiculaire bm: le second a pour base le triangle bfe, et pour hauteur la ligne bn; donc le premier est égal à $\frac{ac.bn.bm}{2}$, et le second $=\frac{ac.bn.bm}{2}$.

Cela posé, soient h la hauteur de la pyramide, B

sa base, $bm = \frac{h}{2}$, le triangle *abc* sera le quart de la base de la pyramide; donc la solidité de chaque prisme sera $\frac{h}{2}, \frac{B}{4}$ et la somme des deux $= \frac{h.B}{4}$.

Chaque pyramide partielle peut être partagée en deux autres pyramides semblables et égales entr'elles, et en deux prismes triangulaires égaux en solidité; et comme les dimensions des pyramides partielles sont la moitié de celles de la pyramide donnée, les deux prismes qui résulteront de chaque pyramide auront chacun pour expression $\frac{h}{4} . \frac{B}{16}$; et les quatre résultats des deux pyramides, seront $\frac{h.B}{4} . \frac{1}{4}$.

Les quatre pyramides résultantes fourniront de nouveau huit pyramides, et huit prismes, dont les dimensions seront toujours la moitié de celles de la pyramide d'où ils ont été déduits. Donc la solidité des huit prismes triangulaires sera $\frac{hB}{4} . \frac{1}{16}$, et ainsi des autres à l'infini, et la solidité de la pyramide donnée sera égale à celle de tous les prismes; plus une infinité de pyramides infiniment petites; on aura donc sol. $= \frac{hB}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \ldots\ldots + \frac{1}{4^\infty} \right\}$; or la somme de cette progression géométrique est $\frac{hB}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{hB}{3}$ (*Algèb.* 122). Donc la solidité de la pyramide triangulaire est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

On néglige dans cette progression le dernier terme, parce qu'il est plus petit que toute gran-

deur assignable, ou zéro : on néglige aussi la solidité d'un nombre infini de petites pyramides restantes, parcequ'il est facile de voir que dans chaque division, la solidité des deux pyramides est moindre que celle des deux prismes (*Euclide*, *prop. 3*, *livre 12*). Donc la solidité des pyramides négligées sera plus petite que celle des derniers prismes, laquelle est elle-même plus petite que toute grandeur assignable.

On peut voir dans la géométrie de Legendre (*note 8*), plusieurs démonstrations ingénieuses de la même proposition : nous en citerons une déduite, comme la précédente, de la considération des progressions géométriques.

Soient b la base de la pyramide proposée, h sa hauteur ; concevons cette pyramide partagée en plusieurs tranches, dont les hauteurs aillent en décroissant selon les termes d'une progression géométrique. Soit ω la hauteur de la première tranche, celle de la seconde $= \omega \left(\frac{h-\omega}{h}\right)$. Celle de la troisième $= \omega \left(\frac{h-\omega}{h}\right)^2$.

La base de la première tranche étant b, celle de la seconde sera $b\left(\frac{h-\omega}{h}\right)^2$... Celle de la troisième $b\left(\frac{h-\omega}{h}\right)^4$....

Formons sur ces différentes bases des prismes excédens, la solidité du premier sera $b\omega$: celle du second sera $b\,\omega\left(\frac{h-\omega}{h}\right)^3$... Celle du troisième

$b\omega\left(\frac{h-\omega}{h}\right)^6$ ..... et ainsi des autres ; donc la somme de tous les prismes excédens formera la progression géométrique :

$$b\omega\left\{1+\left(\frac{h-\omega}{h}\right)^3+\left(\frac{h-\omega}{h}\right)^6+\left(\frac{h-\omega}{h}\right)^9+\ldots\ldots\right\}$$

La somme de cette progression décroissante à l'infini est $b\,\omega \times \frac{h^3}{h^3-(h-\omega)^3} = \frac{b\,h^3}{3\,h^2-3\,h\,\omega+\omega^2}$.

Si on prend ω de plus en plus petit, cette somme diminuera de plus en plus, et s'approchera de $\frac{bh}{3}$: enfin lorsque ω sera zéro, elle se confondra avec sa limite ; mais à cette limite la somme des prismes excédens sera égale à la solidité de la pyramide. Donc... etc.

(*Nota.*) Dans la démonstration de Legendre, page 307, il s'est glissé une erreur essentielle dans les termes de la progression, en ce que le dénominateur est à la place du numérateur, et réciproquement. Cette erreur n'influe point sur le dernier résultat, ce qui prouve que c'est une faute de copiste, mais il importe de la corriger.

(k) *Note XI*, n°. 332, page 139.

Pour avoir l'expression de la solidité de la pyramide tronquée par un plan parallèle à la base, on fera la hauteur de la pyramide tronquée $=H$, la hauteur de la pyramide retranchée $=h$; A^2, la base inférieure du tronc ; B^2 la base supérieure ; S la solidité du tronc.

On aura $S = A^2\left(\frac{H+h}{3}\right) - \frac{B^2 h}{3}$; mais $H+h : h :: A : B$, donc $H+h = \frac{Ah}{B}$, et $h = \frac{BH}{A-B}$. Substituant $S = \frac{A^3 - B^3}{A-B} \times \frac{H}{3} = (A^2 + AB + B^2)\frac{H}{3}$. Or le premier terme est la solidité d'une pyramide qui auroit pour base A^2, et pour hauteur H; le second terme est la solidité d'une seconde pyramide qui auroit pour base une moyenne proportionnelle aux deux bases supérieure et inférieure, et pour hauteur H; le troisième est la solidité d'une troisième pyramide qui auroit pour base B, et pour hauteur H... Donc, etc.

(l) *Note XII*, n°. 338, page 143.

On trouve dans les leçons de l'Ecole normale, une solution analytique du problême qui consiste à déterminer en combien de manières on peut couvrir la surface de la sphère, avec des polygones sphériques égaux et réguliers. Avant de donner cette solution, nous allons en résoudre un autre beaucoup plus simple, et du même genre que celui-là.

Problême premier. De combien de manières peut-on remplir un espace autour d'un point donné sur un plan avec des polygones égaux et réguliers.

Solution. Pour remplir un espace autour d'un point donné, il faut, 1°. qu'il y ait au moins trois angles plans; 2°. il faut que la somme des angles formés autour de ce point par les côtés des polygones qui s'y réunissent, soit égale à quatre angles droits.

Soient r l'angle droit, x le nombre des côtés de

chaque polygone, la somme des angles intérieurs d'un polygone est $2r(x-2) = 2rx - 4r$ (58); donc chaque angle sera $\frac{2rx-4r}{x}$. Supposons qu'il y ait autour du point donné un nombre d'angles représentés par y. On aura l'équation $2rxy - 4ry = 4rx\ldots$ ou $xy - 2y = 2x\ldots y = 2 + \frac{4}{x-2}$.

1°. x ne peut pas être < 3, parce que le plus simple de tous les polygones est le triangle; donc y ne peut pas être > 6.

2°. x ne peut pas être > 6, parce que y doit être un nombre entier; donc y ne peut pas être < 3.

Supposons donc 1°. $x = 3$, on a $y = 6$...2°. $x = 4$, on a $y = 4$... 3°. $x = 5$, on a y fractionnaire... 4°. $x = 6$, on a $y = 3$.

Donc on ne peut remplir un espace autour d'un point donné qu'avec trois sortes de polygones réguliers égaux, savoir, des triangles équilateraux, des quarrés et des hexagones (62). Passons au second problême.

Pour résoudre le second problême, il faut, comme dans le précédent, que la somme des angles sphériques formés autour d'un point donné, égale quatre angles droits; soient x le nombre des côtés de chaque polygone régulier qui recouvre la sphère; y le nombre des angles qui s'assemblent autour d'un même point, et z le nombre des polygones. La surface de tous les polygones qui recouvrent la sphère sera égale à la surface de la sphère $= 8r$ (310). Donc la surface de chaque polygone sera $\frac{8r}{z}$; mais par le théorême (311) cette surface est égale à l'excès de la somme des angles intérieurs du polygone sur

deux fois autant d'angles droits que le polygone a de côtés, moins quatre angles droits : donc la somme des angles intérieurs égale la surface du triangle, plus de fois autant d'angles droits que le polygone a de côtés, moins quatre angles droits; cette somme sera donc représentée par $\frac{8r}{z} + 2r(x-2)$, et chaque angle intérieur sera $\frac{8r}{xz} + \frac{2r(x-2)}{x}$.

La somme des angles qui s'assemblent autour d'un même point sera par conséquent $\frac{8ry}{xz} + 2ry\left(\frac{x-2}{x}\right)$. On aura donc l'équation.... $\frac{8ry}{xz} + 2ry\left(\frac{x-2}{x}\right) = 4r$, ou en réduisant $4y + zy(x-2) = 2xz$. Cette équation indéterminée peut se mettre sous cette forme $z = \frac{4y}{2x - y(x-2)}$.

Si le dénominateur de cette fraction étoit négatif, la valeur de z seroit négative. Donc $2x + 2y$ doit être $> yx$... ou $\frac{2y}{y-2} > x$, on a donc.... $x < 2 + \frac{4}{y-2}$.

x doit être entier et positif; donc y ne peut pas être > 6 ni < 3, et par conséquent x ne peut pas être < 3 ni > 6.

Supposons, 1°. $x = 3$, on a $z = \frac{4y}{6-y}$.

Si l'on fait dans cette équation $y = 3$, on a $z = 4$.... Si l'on fait $y = 4$, on a $z = 8$... Si l'on

fait $y = 5$, on a $z = 20$. Enfin, si l'on fait $y = 6$, on a $z = \frac{24}{0} = \infty$.

Ainsi on peut recouvrir la sphère avec quatre ou huit, ou vingt, ou une infinité de triangles équilatéraux.

Supposons, 2°. $x = 4$, on a $z = \frac{2y}{4 - y}$.

Si l'on fait dans cette équation $y = 3$, on a $z = 6$... Si l'on fait $y = 4$, z devient infini.

On peut donc recouvrir la sphère avec quatre, ou une infinité de polygones réguliers de quatre côtés.

Supposons, 3°. $x = 5$, on a $z = \frac{4y}{10 - 3y}$.

Si l'on fait $y = 3$, on a $z = 12$. Si l'on fait $y = 4$, z devient négatif.

On ne peut donc recouvrir la sphère que d'une seule manière avec des polygones de cinq côtés.

Supposons enfin $x = 6$, on a $z = \frac{y}{3 - y}$.

Si l'on fait $y = 3$, z devient infini, on ne peut donc recouvrir la sphère, que d'une manière avec des polygones réguliers de six côtés, en les prenant en nombre infini.

Si l'on ne considère que des polygones finis, on voit que la sphère ne peut être recouverte avec des polygones réguliers que de cinq manières différentes ; savoir, de trois manières avec des triangles, d'une manière avec des polygones de quatre côtés, et d'une manière avec des polygones de cinq côtés.

Si l'on considère les polygones infiniment petits, on a encore trois manières de recouvrir la sphère ; savoir, avec des triangles, des quarrés et des hexa-

gones. Or, si on suppose le rayon de la sphère infini, une partie finie de la surface se confond avec le plan, et pour lors ce dernier cas rentre dans le premier problême.

Si l'on conçoit, tirées, les cordes de tous les arcs qui forment les polygones sphériques qui couvrent la sphère, ces cordes formeront les arêtes des polyèdres réguliers inscrits dans la sphère : il suit donc de ce qui précède, qu'il ne peut y avoir que cinq polyèdres réguliers qu'on puisse inscrire et circonscrire dans une sphère (276).

Note XIII, n°. 253, page 153.

Il est aisé de déterminer, d'après le théorême (185) et la fin de la note 3, les cordes de tous les arcs, lorsqu'on connoît la corde d'un arc donné ou de deux.

Fig. 175. Soit donnée la corde $AB = a$, et la corde $BC = b$: on demande la corde $AC = d$, qui soutend la somme des deux arcs donnés. Par le point B, et par le centre, je mène le diamètre BD que je nomme $2r$. La corde AD égalera $\sqrt{4r^2 - a^2}$... La corde CD égalera $\sqrt{4r^2 - b^2}$; donc $2r \cdot d = a\sqrt{4r^2 - b^2} + b\sqrt{4r^2 - a^2}$.

Par le moyen de cette équation, on peut résoudre les problêmes suivans.

Connoissant a et b, déterminer d.
Connoissant a et d, déterminer b.
Connoissant b et d, déterminer a.

Exemple. Supposons, 1°. que $a = b$, 2°. que l'arc ABC est de 60^d, on demande de déterminer a, ou la corde de 30^d.

On a ici $d=r$; donc $2r^2 = 2a\sqrt{4r^2-a^2}$. Elevant le tout au quarré $r^4 = 4a^2r^2 - a^4$, ou $a^4 - 4a^2r^2 = -r^4$; donc $a^2 = 2r^2 \pm \sqrt{3r^4}$, et $a = r\sqrt{2 \pm \sqrt{3}} = 0{,}6065....$ en prenant le rayon pour l'unité, le radical avec le signe moins.

Exemple deuxième. Cherchons la corde de 120^d, étant donnée celle de 60^d.

On aura ici $a = b = r$; donc $d = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3} = 1{,}7321.....$

Note XIV, n°. 362, page 160.

Si l'on représente par a l'arc que nous avons appelé A, et par b l'arc désigné par B, on aura,

$$\sin.(a+b) = \sin.a\cos.b + \sin.b\cos.a$$
$$\cos.(a+b) = \cos.a\cos.b - \sin.a\sin.b$$
$$\sin.(a-b) = \sin.a\cos.b - \sin.b\cos.a$$
$$\cos.(a-b) = \cos.a\cos.b + \sin.a\sin.b.$$

Si l'on fait $b = a$, les deux premières formules se réduiront à

$$\sin.2a = 2\sin.a\cos.a$$
$$\cos.2a = \cos.^2a - \sin.^2a.$$

Si on met dans cette dernière $1 - \cos.^2 a$ à la place de $\sin.^2 a$, on aura $\cos.2a = 2\cos.^2 a - 1$.

Par le moyen de ces deux formules, on aura le sinus et le cosinus du double d'un arc dont on connoît déjà le sinus et le cosinus.

Si on fait $b = \frac{1}{2}a$ dans les deux autres formules, on aura,

1°. $\text{Sin.}\frac{1}{2}a = \sin.a\cos.\frac{1}{2}a - \sin.\frac{1}{2}a\cos.a$,

ou $\sin.\frac{1}{2}a = \dfrac{\sin.a\cos.\frac{1}{2}a}{1+\cos.a}$; mais $\sin.a = 2\sin.\frac{1}{2}a$

$\cos.\frac{1}{2}a$; donc on a l'équation $\sin.\frac{1}{2}a = \frac{2\sin.\frac{1}{2}a\cos.^2\frac{1}{2}a}{1+\cos.a}$, d'où l'on tire $\cos.\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+\cos.a}{2}}$.

2°. $\text{Cos.}\frac{1}{2}a = \cos.a\cos.\frac{1}{2}a + \sin.a\sin.\frac{1}{2}a$, ou $\cos.\frac{1}{2}a = \frac{\sin.a\sin.\frac{1}{2}a}{1-\cos.a}$, mettant pour $\sin.a$ sa valeur, $\sin.\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\cos.a}{2}}$.

Ces deux formules serviront à trouver les sinus et cosinus de la moitié d'un arc donné, lorsqu'on connoît les sinus et cosinus de ces arcs.

On trouve encore ici la démonstration d'une proposition que nous avons supposée (*note 6*) ; car de l'équation $\sin.\frac{1}{2}a = \frac{\sin.a\times\cos.\frac{1}{2}a}{1+\cos.a}$, on déduit... $\frac{1+\cos.a}{\sin.a} = \frac{\cos.\frac{1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}a} = \cot.\frac{1}{2}a$... et de l'expression $\cos.\frac{1}{2}a$, on déduit $\frac{1-\cos.a}{\sin.a} = \frac{\sin.\frac{1}{2}a}{\cos.\frac{1}{2}a} = \text{tang.}\frac{1}{2}a$, comme nous l'avons supposé dans la note citée.

Reprenons les quatre formules fondamentales : ajoutant d'abord la première à la troisième, ou soustrayant le troisième de la première, on aura les deux suivantes.

$$\sin.(a+b) + \sin.(a-b) = 2.\sin.a\times\cos.b$$
$$\sin.(a+b) - \sin.(a-b) = 2.\sin.b\times\cos.a.$$

Faisant les mêmes opérations sur la seconde et la quatrième, on aura,

$$\cos.(a+b) + \cos.(a-b) = 2.\cos.a\times\cos.b$$
$$\cos.(a+b) - \cos.(a-b) = 2.\sin.a\times\sin.b.$$

On se sert de ces quatre formules, lorsqu'on veut transformer des produits de sinus et cosinus, en sommes ou différences.

Supposons $a + b = x$, et $a - b = y$, on aura $a = \frac{x+y}{2}$ $b = \frac{x-y}{2}$. Ces valeurs substituées dans les quatre équations précédentes en changeront la forme ainsi qu'il suit.

$$\sin. x + \sin. y = 2. \sin. \frac{x+y}{2} \times \cos. \frac{x-y}{2}$$

$$\sin. x - \sin. y = 2. \sin. \frac{x-y}{2} \times \cos. \frac{x+y}{2}$$

$$\cos. x + \cos. y = 2. \cos. \frac{x+y}{2} \times \cos. \frac{x-y}{2}$$

$$\cos. x - \cos. y = 2. \sin. \frac{x+y}{2} \times \sin. \frac{x-y}{2}.$$

Ces quatre formules serviront à transformer des sommes ou des différences de sinus et cosinus, en produits d'autres sinus et cosinus. Donnons-en deux exemples.

Soit le produit $\sin. 15^d \times \cos. 12^d$.... On trouvera par la première des quatre formules précédentes, en faisant $\frac{x+y}{2} = 15$, et $\frac{x-y}{2} = 12$... $\sin. 15 + \cos. 12^d = \frac{\sin. 27^d + \sin. 3^d}{2}$.

Si l'on avoit $\sin. 12^d \times \cos. 15^d$, on se serviroit de la seconde équation, et l'on auroit $\sin. 12^d \times \cos. 15^d = \frac{\sin. 27 - \sin. 3^d}{2}$.

On aura aussi par les mêmes formules,

$$\sin.15 + \sin.12^d = 2.\sin.\frac{27^d}{2} \times \cos.\frac{3^d}{2}$$

$$\sin.15^d - \sin.12^d = 2.\sin.\frac{3^d}{2} \times \cos.\frac{27}{2}.$$

Pour avoir l'expression de la tangente et de la cotangente de la somme, ou de la différence de deux arcs, nous aurons,

1°. $$\text{tang.}(a+b) = \frac{\sin.(a+b)}{\cos.(a+b)} = \frac{\sin.a \times \cos.b + \sin.b \times \cos.a}{\cos.a \times \cos.b - \sin.a \times \sin.b},$$

Divisant tous les termes de cette fraction par $\cos.a \times \cos.b$, on a,

$$\text{tang.}(a+b) = \frac{\frac{\sin.a}{\cos.a} + \frac{\sin.b}{\cos.b}}{1 - \frac{\sin.a \times \sin.b}{\cos.a \times \cos.b}} = \frac{\text{tang.}a + \text{tang.}b}{1 - \text{tang.}a \times \text{tang.}b}$$

et $$\text{tang.}(a-b) = \frac{\sin.(a-b)}{\cos.(a-b)} = \frac{\sin.a \times \cos.b - \sin.b \times \cos.a}{\cos.a \times \cos.b + \sin.a \times \sin.b}$$

$$= \frac{\text{tang.}a - \text{tang.}b}{1 + \text{tang.}a \times \text{tang.}b}.$$

2°. $$\cot.(a+b) = \frac{\cos.(a+b)}{\sin.(a+b)} = \frac{\cos.a \times \cos.b - \sin.a \times \sin.b}{\sin.a \times \cos.b + \sin.b \times \cos.a}$$

$$= \frac{\frac{\cos.a}{\sin.a} - \frac{\sin.b}{\cos.b}}{1 + \cot.a \times \text{tang.}b} = \frac{\cot.a - \text{tang.}b}{1 + \cot.a \times \text{tang.}b};$$ mais

$$\text{tang.}b = \frac{1}{\cot.b};$$ donc $$\cot.(a+b) = \frac{\cot.a \times \cot.b - 1}{\cot.a + \cot.b},$$

et $\cot.(a-b)=\frac{\cos.a\times\cos.b+\sin.a\times\sin.b}{\sin.a\times\cos.b-\sin.b\times\cos.a}$.
Divisant par $\sin.a\times\sin.b$, on aura $\cot.(a-b)$
$=\frac{\cot.a\times\cot.b+1}{\cot.b-\cot.a}$.

On trouveroit des formules analogues pour les sécantes et cosécantes.

(n) *Note XV*, n°. 385, page 172.

On peut démontrer analytiquement la proposition de géométrie dont on fait usage pour résoudre ce problême; car on a $AB:BC::\sin.C:\sin.A$... Donc $AB+BC:AB-BC::\sin.C+\sin A$ $:\sin.C-\sin.A$; donc $\frac{AB+BC}{AB-BC}=\frac{\sin.C+\sin.A}{\sin.C-\sin.A}$

$$=\frac{\sin.\frac{C+A}{2}\times\cos.\frac{C-A}{2}}{\cos.\frac{C+A}{2}\times\sin.\frac{C-A}{2}}=\frac{\text{tang.}\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\text{tang.}\left(\frac{C-A}{2}\right)},$$

ce qui donne la proportion $AB+BC:AB-BC::\text{tang.}\frac{C+A}{2}:\text{tang.}\frac{C-A}{2}$.

Au lieu de se servir de cette proposition pour résoudre le problême proposé, il sera plus simple d'y employer la proposition énoncée (*note II*). En effet, l'équation $a^2\pm 2\,ab\cos.\varphi+b^2-c^2$, donne... $c=\pm\sqrt{a^2\pm 2\,ab.\cos\varphi+b^2}$. Ainsi, le côté AC sera déterminé, lorsque les côtés AB, BC, et l'angle B compris entre les deux côtés, seront connus.

La propriété des triangles démontrée (*note II*)

est si générale, qu'elle suffit pour résoudre tous les problêmes de la trigonométrie; car, 1°. on vient de voir qu'elle résout directement le cas où l'on connoît deux côtés, et l'angle compris; 2°. elle sert aussi à connoître les trois angles quand on connoît les trois côtés; 3°. nous allons en déduire le cas le plus général; savoir, étant donnés deux angles, et un côté opposé à un des angles connus, déterminer l'angle opposé à son côté connu. En effet, on a $a^2+b^2-c^2=\mp 2ab\cos.\varphi$, soit ψ l'angle CBA, on aura $a^2+c^2-b^2=\mp 2ac\cos.\psi$.

Elevant les deux équations au quarré, et substituant $1-\sin.^2\varphi$, $1-\sin.^2\psi$, pour $\cos.^2\varphi$, et $\cos.^2\psi$, et $\cos.^2\psi$, on aura,

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=4a^2b^2(1-\sin.^2\varphi)$$
$$a^4+c^4+b^4+2a^2b^2-2a^2b^2-2b^2c^2=4a^2c^2(1-\sin.^2\psi)$$

Retranchant une de ces deux équations de l'autre, on a $b^2\sin.^2\varphi=c^2\sin.^2\psi$, et par conséquent $\sin.\varphi : c :: \sin.\psi : b$, ce qui est la proportion énoncée.

Note XVI, n°. 385, page 172.

Pour exprimer algébriquement les analogies démontrées dans ce théorême, on fera $BC=x$, $AB=y$ $AC=z$; les angles $A=\varphi$, $B=\psi$, $C=\omega$, on aura,

$$\cos.x=\cos.y\times\cos.z+\sin.y\times\sin.z\times\cos.\varphi$$
$$\cos.y=\cos.x\times\cos.z+\sin.x\times\sin.z\times\cos.\omega$$
$$\cos.z=\cos.x\times\cos.y+\sin.x\times\sin.y\times\cos.\psi.$$

Ces trois analogies suffisent pour résoudre tous les problêmes de la trigonométrie sphérique. Il est aisé d'en déduire la proposition démontrée dans le théorême (384). Prenons pour cela deux équations

tions précédentes, et élevons-les au quarré, en substituant $1 - \sin.^2 \varphi$, $1 - \sin.^2 \omega$, pour $\cos.^2 \varphi$, $\cos.^2 \omega$, on aura,

$$\cos.^2 x - 2.\cos. x \times \cos. y \times \cos. z + \cos.^2 y \times \cos.^2 z = \sin.^2 y . \times \sin. z^2 (1 - \sin.^2 \varphi)$$
$$\cos.^2 y - 2.\cos. x \times \cos. y \times \cos. z + \cos.^2 x \times \cos.^2 z = \sin.^2 x . \times \sin. z^2 (1 - \sin.^2 \omega)$$

Retranchant une équation de l'autre, et réduisant, on a,

$$\sin.^2 y \times \sin.^2 \varphi = \sin.^2 x \times \sin.^2 \omega.$$

Ce qui donne la proportion :

$$\sin. y : \sin. x :: \sin. \omega : \sin. \varphi.$$

Si le triangle est rectangle en $\mathcal{A}$, on aura $\cos. \varphi = 0$ et $\sin. \varphi = 1$. La première équation deviendra,

$$\cos. x = \cos. y \times \cos. z.$$

Cette valeur substituée dans les deux autres, elle deviendra,

$$\cos. y \times \sin. z = \cos. \omega \times \sin. x$$
$$\cos. y \times \sin. y = \cos. \psi \times \sin. x,$$

où l'on voit évidemment, par la loi des signes, que chaque angle et le côté opposé, doivent être de même espèce, et que l'hypoténuse x sera toujours aiguë, tant que les deux côtés y, z seront tous les deux de même espèce : elle sera $> 90^d$, si les deux côtés sont d'espèce différente, un $> 90^d$, et l'autre $< 90^d$.

Si le triangle obliquangle a un côté de 90^d, les premières équations se simplifieront beaucoup.

Soit $x = 90^d$, et l'on aura,

$$0 = \cos. y \times \cos. z + \sin. y \times \sin. z \times \cos. \varphi$$
$$\cos. y = \cos. \omega \times \sin. z$$
$$\cos. z = \cos. \psi \times \sin. y,$$

où l'on voit que l'angle φ opposé à x sera aigu, si les deux côtés z, y sont de différente espèce. Il sera obtus, si les deux côtés sont de même espèce. Les deux angles ω, ψ seront de même espèce que le côté qui leur est opposé.

Pour donner un exemple de la manière d'éliminer les inconnues au moyen des trois équations, supposons connus les deux angles ψ, ω, et le côté $x = 90^d$, et cherchons la valeur de l'angle φ.

La première des trois dernières équations donne,

$$\cos.\ \varphi = -\frac{\cos.\ y \times \cos.\ z}{\sin.\ y \times \sin.\ z}.$$

La deuxième donne $\cos\ \omega = -\dfrac{\cos.\ y}{\sin.\ z}$.... La troisième donne $\cos.\psi = -\dfrac{\cos.\ z.}{\sin.\ y}$. Ces deux équations multipliées entr'elles donnent,

$\cos.\ \omega \times \cos.\ \psi = \dfrac{\cos.\ y \times \cos.}{\sin.\ y \times \sin.\ z}$... Donc $\cos.\ \varphi = -\cos.\ \psi \times \cos.\ \omega$, ce qui annonce, qu'en pareil cas, les trois angles ne peuvent pas être tous les trois aigus.

Deuxième exemple. Etant donnés deux angles ω, ψ, et le côté $x = 90^d$, déterminer les deux autres côtés.

On aura en élevant au quarré,

$$1 - \sin.^2 y = \cos.^2 \omega \times \sin.^2 z$$
$$1 - \sin.^2 z = \cos.^2 \psi \times \sin.^2 y.$$

Donc $1 - \cos^2.\ \omega \times \sin.^2 z = \sin.^2 y = \dfrac{1 - \sin.^2 z}{\cos.^2 \psi}$.

Ce qui donnera $\sin. z = \frac{\sin. \psi}{\sqrt{1 - \cos.^2 \omega \times \cos.^2 \psi}}$. On auroit par un calcul semblable,

$$\sin. y = \frac{\sin. \omega}{\sqrt{1 - \cos.^2 \omega \times \cos.^2 \varphi}}.$$

Reprenons les formules générales rapportées au commencement de cette note, et cherchons les trois côtés d'un triangle obliquangle, dont on connoît *les trois angles.*

On commencera par chasser cos. x de la seconde et de la troisième formule générale, au moyen de la première, et on aura

$\cos. y = \cos.^2 z \times \cos. y + \cos. \varphi \sin. y \times \sin. z \times \cos. z + \cos. \omega \times \sin. z \times \sin. x$

ou $\cos. y \times \sin. z = \cos. \varphi \times \sin. y \times \cos. z + \cos. \omega \times \sin. x$.

La troisième donnera

$\sin. y \times \cos. z = \cos. \varphi \times \sin. z \times \cos. y \times \cos. \psi \times \sin. x$.

Multipliant la première de ces deux dernières équations par cos. φ, et ajoutant on a

$\sin. y \times \cos. z = \cos.^2 \varphi \times \sin. y \times \cos. z + (\cos. \psi + \cos. \varphi \times \cos. \varphi)$ $\sin. x$, ou $\sin. y \times \cos. z \sin.^2 \varphi = (\cos. \psi + \cos. \omega \times \cos. \varphi)$ $\sin. x$; mais d'un autre côté on a

$\sin. y : \sin. x :: \sin. \omega : \sin. \varphi$. Donc $\sin. y \times \sin. \varphi = \sin. x \times \sin. \omega$. Cette valeur substituée donne

$$\cos. z = \frac{\cos. \psi \times \cos. \omega \times \cos. \varphi}{\sin. \omega \times \sin. \varphi}.$$

Les cosinus de $180 - z$, $180 - \psi$... etc. sont les mêmes que ceux de leurs supplémens, au signe près qui doit être négatif, on pourra donc écrire

$$\cos. 180 - z = \frac{\cos. (180 - \psi) - (\cos. (180 - \omega) \times \cos. (180 - \varphi))}{\sin. (180 - \omega) \times \sin. (180 - \varphi)}$$

La question pour résoudre un triangle dont les angles sont donnés, se réduit donc à en résoudre

un autre dont les côtés seroient donnés, et qui seroient supplément de ces angles. C'est le triangle que nous avons nommé *supplémentaire*, ou *polaire* (301).

Nous ne pousserons pas plus loin l'application de l'Algébre à la Trigonométrie sphérique ; les cas particuliers que nous avons choisis, suffisent pour faire voir comment il faudroit s'y prendre pour déduire tous les autres des trois formules générales.

Note XVII, n°. 412, pag. 191.

Soit l'arc $BC = a$, on a $\cos. A = \frac{\cos. a}{1 + \cos. a}$;
mais $\frac{1 + \cos. a}{\sin. a} = \frac{1}{\text{tang.} \frac{1}{2} a}$ (*note 13*); donc $\cos. A$
$= \frac{\text{tang.} \frac{1}{2} a}{\text{tang.} a} = \frac{1 - \text{tang.}^2 \frac{1}{2} a}{2}$ (*note 13.*)

Dans le tétraèdre $\frac{1}{2} a = 30^d$. Donc $\cos. A$
$= \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}$ et l'angle $A = 70^d\ 32'$.

Dans l'hexaèdre $\frac{1}{2} a = 45^d$ et tang. $\frac{1}{2} a = 1$, donc $\cos. A = 0$, et l'angle A 90^d.

Dans le dodécaèdre $\frac{1}{2} a = 54^d$... tang. $\frac{1}{2} a =$ l'apothême du pentagone divisé par la moitié du côté du pentagone.

Or le côté du pentagone, celui de l'hexagone et du décagone forment un triangle rectangle. (*Voyez Euclide, prop. 10, liv. 13.*)

Avec ces données on peut calculer le côté du pentagone et son apothême, et l'on trouvera, en faisant x le côté du pentagone =.... $\cos. A = \frac{1}{2}$ —

$$\frac{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}{\frac{2^2 x^2}{4}} = \tfrac{1}{2} - \left(\frac{4-x^2}{2x^2}\right) = \frac{x^2-2}{x^2} = \frac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}}$ et l'angle $A = 116^d\ 34'$.

Dans l'octaèdre on fera $AB = b$, donc cos. $A = -$ cot. $^2 b = -$ cot. $60^d = -\frac{1}{3}$ et l'angle $A = 109^d\ 28'$.

Dans l'icosaèdre on a $BC = a$. Donc cos. $A = \frac{4 \cos. a - 1}{3} = \frac{8 \cos.^2 \frac{1}{2} a - 5}{3} =$ Or, cos. $^2 \frac{1}{2} a =$ le quarré de la moitié du côté du pentagone $\frac{5-\sqrt{5}}{8}$;

donc cos. $A = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ et l'angle $A = 138^d\ 10'$....

Ces valeurs serviront à simplifier les constructions par lesquelles étant donné le côté d'un polyèdre, on détermine les rayons des sphères inscrites et circonscrites. (*Voyez la Géométrie de Legendre, note 10; Euclide, liv. 13 et suivans.*)

FIN.

ERRATA.

PAGE 8, ligne 3, eut; *lisez* s'appellent.
Page 19, ligne 12, étant donne l'angle *A R r; lisez R Ar.*
Page 19, lig. 27, les distances; *lisez* la distance.
—— lig. 30, l'angle *m n R*; lisez *n m R*.
Page 32, lig. 9, en la portant; *lisez* en le portant.
—— lig. 19 (3. III); *lisez* (8. III).
Page 53, lig. 30, donc $DCO = 60^d$; *lisez* donc $DOC = 60^d$.
Page 84, lig. 19 (3...9); *lisez* (8...IX).
Page 159, lig. avant dernière de la note, et sin. de *BDA*; *lisez* et sin. de *DBA*.
Page 160, lig. 7, du cosinus du second par le cosinus du premier; *lisez* du cosinus du second par le sinus du premier.
—— ligne avant-dernière = sin. $A \times$ cos. $B \times$ sin. $B \times$ cos. A; *lisez* sin. $A \times$ cos $B +$ sin. $B \times$ cos. A.
Page 100, lig. 25, 5°. les triangles *EAG*; *lisez CAG.*
Page 104, lig. 19, à la marge, fig. 116; *lisez* 115.
Page 107, lig. 3, à la marge, fig. 119; *lisez* 143.
Page 161 lig. 3, multiplié par le cosinus du second; *lisez* multiplié par le sinus.
Fig. 150, mettez *N* à la place de *A'*.

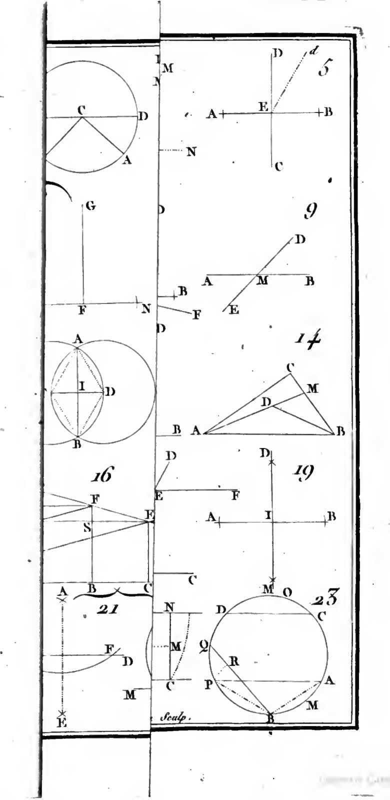
NOTICE ABRÉGÉE

Des Livres de la Librairie Mathématique de J. B. M. DUPRAT.

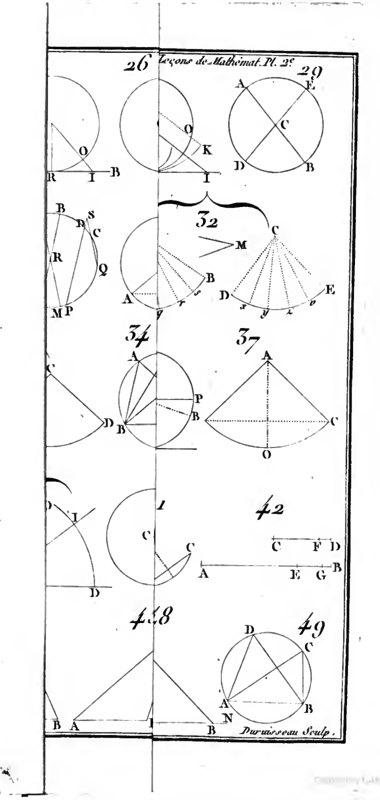
MÉCANIQUE analytique, par *J. L. Lagrange*, *in*-4. 13 fr.
Théorie des fonctions analytiques, par le même, *in*-4. 5 fr.
De la résolution des équations numériques, par le même, *in*-4. 9 fr.
Essai sur la Théorie des Nombres, par *A. M. Legendre*, *in*-4. 18 fr.
Mémoire sur les Transcendantes elliptiques, par le même, *in*-4. 6 fr.
Élémens de Géométrie, par le même, *in*-8. 5 fr.
Exposition du Système du Monde, par *P. S. Laplace*, 2 vol. *in*-8. 10 fr.
Traité de Mécanique céleste, par le même, 2 vol. *in*-4. 30 fr.
Traité du Calcul différentiel et intégral, par *Lacroix*, 2 vol. *in*-4. 33 fr.
Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes, ou Élémens de Géométrie descriptive, par le même. 2 fr. 5 déc.
Élémens d'Algèbre de Clairaut, cinquième édition, avec un Supplément, par le même, 2 vol. *in*-8. 10 fr.
Elémens de Géométrie, par le même, *in*-8. 4 fr.
Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie, par le même, *in*-8. 4 fr.
Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal, par *Carnot*, *in*-8, *fig.* 1 fr. 8 déc.
Essai sur les Machines en général, par le même, *in*-8. 2 fr. 5 déc.
Leçons élémentaires d'Arithmétique et d'Algèbre, par *Tedenat*, *in*-8. 4 fr.
L'Arithmétique se vend séparément, 2 fr. 5 déc.
Leçons élémentaires de Géométrie, par le même, *in*-8. 5 fr.
Géométrie du compas, par *L. Mascheroni*, *in*-8. 5 fr.
Adnotationes ad Calculum integralem *Euleri*, auctore *L. Mascheronio*, *in*-4. 9 fr.
La Langue des Calculs, ouvrage posthume de *Condillac*. 4 fr.
Isaaci Newtoni Enumeratio Linearum tertii ordinis; sequitur illustratio ejusd. tractatûs auct. *J. Stirling*, *in*-8. 7 fr. 5 déc.
Principiorum Calculi differentialis et integralis expositio elementaris, auct. *S. L'huillier*, *in*-4. 14 fr.
Mélanges mathématiques, par *Nieuport*, *in*-4. 12 fr.
Essai sur les ouvrages Physico-Mathématiques de Léonard de Vinci, avec des fragmens tirés de ses manuscrits apportés de l'Italie, par *J. B. Venturi*, Professeur de physique à Modène, 2 fr. 5 déc.
Traité élémentaire de Mathématiques pures, par *E. M. J. Lemoine*, (d'Essoies), troisième édition, 2 vol. *in*-8. 9 fr.
Traité de Mécanique, par *Marie*, *in*-4. 12 fr.
Hydrographie démontrée et appliquée à toutes les parties du pilotage, à l'usage des Élèves ou Aspirans de la Marine militaire ou marchande, par *Lassale*, *in*-8. 6 fr.
Introductio in Analysin infinitorum, auct. *L. Eulero*, 2 vol. *in*-4. 24 fr.
Ejusd. institutiones Calculi differentialis et Calculi integralis, cum Supplementis, 6 vol. *in*-4. 160 fr.
Tables portatives de Logarithmes, par *Callet*, *in*-8. rel. 14 fr.
Traité des mouvemens des Corps célestes, par *du Séjour*, 2 vol. *in*-4. 48 fr.
Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, par *Delambre* et *Legendre*, *in*-4. 6 fr.
Tables de Jupiter et de Saturne, par *Delambre*, *in*-4. 6 fr.

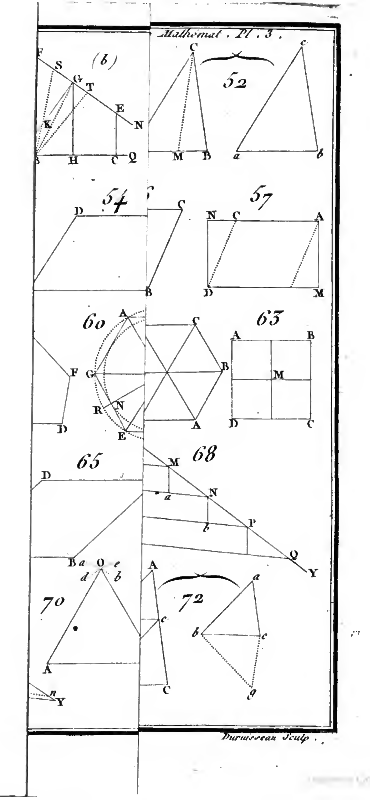
Voyage astronomique et géographique pour mesurer deux degrés du méridien, par les PP. *Maire* et *Boscovich*, *in*-4. 12 fr.
Œuvres de *Blaise Pascal*, 5 vol. *in*-8. 24 fr.
Pinacothèque, ou Collection de Tables, par *Gruson*, *in*-8. 10 fr.
Essai sur l'application de l'Analyse aux probabilités des décisions rendues à la pluralité des voix, par *Condorcet*, *in*-4. 15 fr.
Elémens d'Algèbre de *Léonard Euler*, avec l'Analyse indéterminée de *Lagrange*, 2 vol. *in*-8. 10 fr.
Théorie complète de la Construction et de la Manœuvre des Vaisseaux, par *L. Euler*, *in*-8. 5 fr.
Euleri Mechanica, sive Motûs Scientia, 2 vol. *in*-4. 48 fr.
Johannis Bernoulli opera, 4 vol. *in*-4. 48 fr.
Jacobi Bernoulli opera, 2 vol. *in*-4. 36 fr.
— Ars conjectandi, *in*-4. 15 fr.
Danielis Bernoulli hydrodynamica, *in*-4. 21 fr.
Cours de Mathématiques, par *Ch. Bossut*, 3 vol. *in*-8. 15 fr.
Traité théorique et expérimental d'Hydrodynamique, par le même, 2 vol. *in*-8. 10 fr.
Traités de Calcul différentiel et intégral, par le même, 2 vol. *in*-8. 12 fr.
Leçons élémentaires d'Arithmétique, par *Mauduit*, *in*-8. 5 fr.
Leçons de Géométrie théorique et pratique, par le même, *in*-8. 5 f. 5 d.
Introduction aux Sections coniques, par le même, *in*-8. 3 fr.
Principes d'Astronomie sphérique, par le même, *in*-8. 5 fr.
Elémens des Sections coniques démontrés par synthèse, par le même, *in*-8. 6 fr.
Traité élémentaire de Statique à l'usage des Ecoles de la Marine, par *G. Monge*, troisième édition, *in*-8. 3 fr.
Exposition d'une Méthode pour construire les Equations indéterminées qui se rapportent aux Sections coniques, par *Prony*, *in*-4. 3 fr. 5 déc.
Nouvelle Architecture hydraulique, par le même, 2 vol. *in*-4. 60 fr.
Astronomie, par *J. Lalande*, 3 vol. *in*-4. 60 fr.
Abrégé d'Astronomie, par le même, *in*-8. 5 fr.
Traité analytique de la Résistance des Solides, et des Solides d'égale résistance, par *Girard*, *in*-4. 13 fr.
Récréations mathématiques et physiques, par *Ozanam*, nouvelle édition, totalement refondue par *Montucla*, 4 vol. *in*-8. 20 fr.
Traité de Trigonométrie, par *Cagnoli*, *in*-4. 15 fr.
Calcolo integrale delle equazioni lineari, del *D. Vincenzio Brunacci*. Firenze, 1798, *in*-4. 13 fr.
Opuscolo analitico sopra l'integrazione delle equazioni a differenze finite, del medesimo, 1792, *in*-4. 4 fr.
De Calculo integralium exercitatio mathematica, *P. Ferroni*, *in*-4. 15 fr.
Ejusd. Magnitudinum exponentialium, logarithmorum et trigonometriæ sublimis theoria novâ methodo pertractata, *in*-4. 24 fr.
Teoria dell' analisi da servire d'introduzione al metodo diretto ed inverso de' limiti, opera del sig. *Franchini*, 3 vol. *in*-8. 15 fr.
Elementi d'Algebra di Pietro Paoli, 2 vol. *in*-4. 21 fr.
Développemens de la partie élémentaire des Mathématiques, par *L. Bertrand*, 2 vol. *in*-4. 33 fr.
J. A. Tommasini specimen de Maximis et Minimis, *in*-8. 6 fr.
Essai sur les Nombres approximatifs, par *Massabiau*, *in*-8. 1 fr. 25 c.
Arithmétique d'Emile, par *E. Develay*, *in*-8. 3 fr.

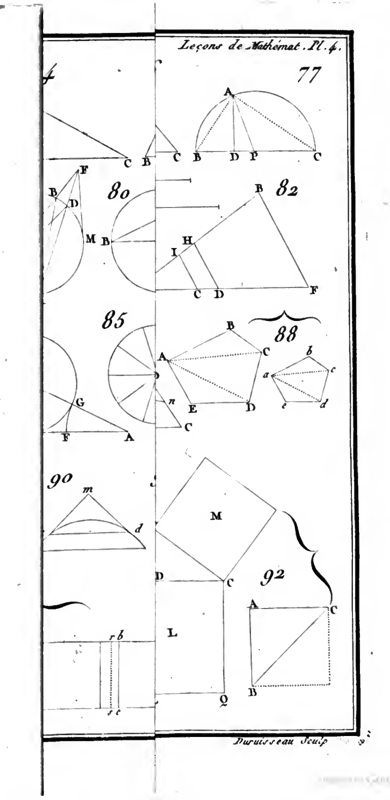
Le même Libraire possède un assortiment de Livres anciens et rares concernant la Géométrie, la Mécanique et l'Astronomie.

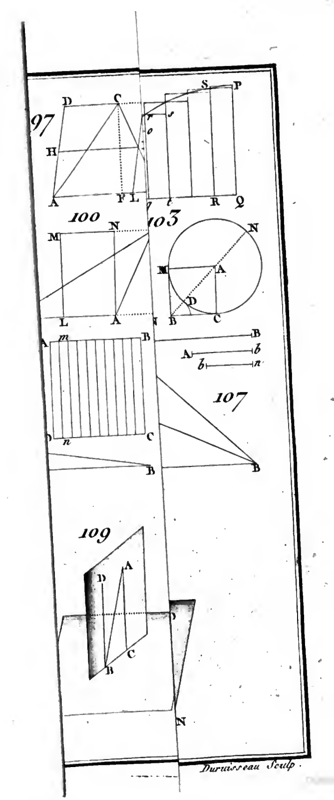


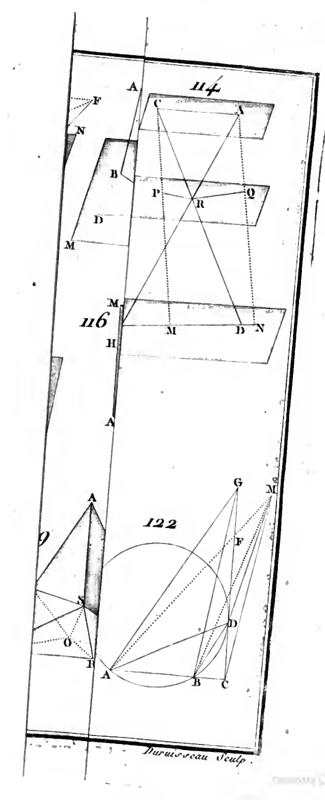
5
9
14
16
19
21
23
Sculp.

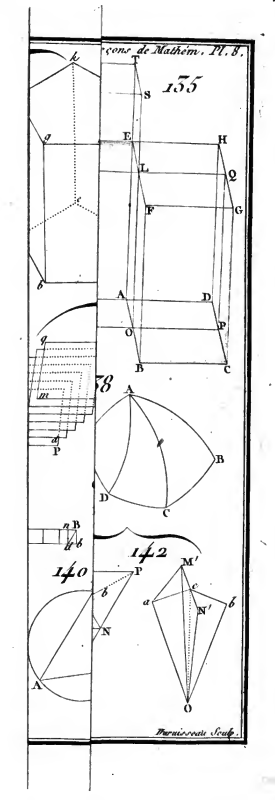

26
Leçons de Mathémat. Pl. 2e
29
A
E
C
D
B
O
K
R
I
B
I
32
C
M
B
S
C
R
Q
M P
A
B
D
E
34
37
A
P
C
D
B
B
C
O
42
C
F D
A
E G B
C
D
I
D
48
49
D
C
A
B
B A
N
B
Duruisseau Sculp.

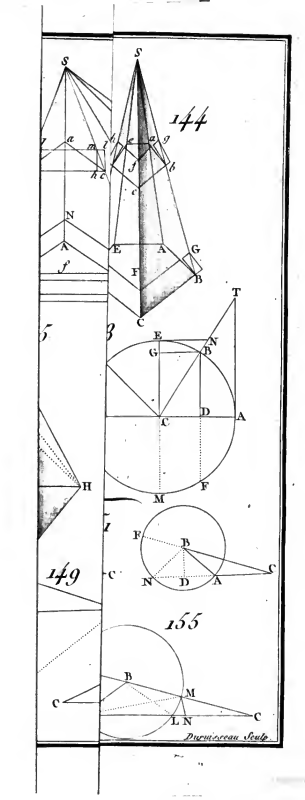

Mathemat. Pl. 3.
(b)
52
54
57
60
63
65
68
70
72
Duruisseau Sculp.

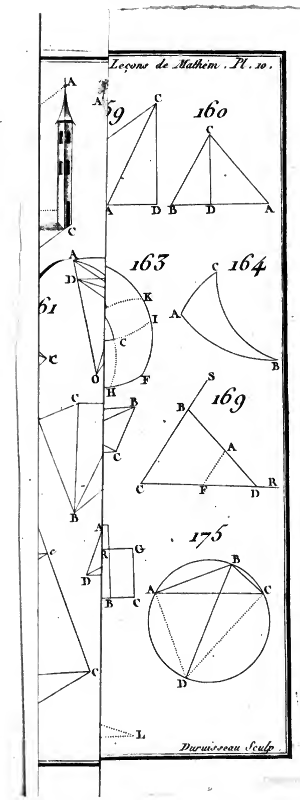

77
A
B
D
P
C
80
B
82
B
H
I
C
D
F
M
85
B
A
C
E
D
n
88
b
a
c
e
d
G
F
A
90
m
d
M
D
C
L
Q
92
A
C
B
r b
s c


97
100
103
107
109
Duruisseau Sculp.


114
A
F
N
C
A
B
P
Q
R
D
M
M
116
M
D
N
H
A
G
M
A
122
9
F
S
D
O
P
A
B
C
Duruisseau Sculp.


çons de Mathém. Pl. 8.
135
k
T
S
q
E
H
L
Q
F
G
e
b
A
D
O
P
B
C
q
m
78
A
B
D
C
d
P
n B
d b
142
140
P
M'
c
a
b
N'
b
N
A
O
Taruissoau Sculp.


144
149
155
Duruisseau Sculp.



Leçons de Mathém. Pl. 10.
159
160
163
164
161
169
175
Duruisseau Sculp.

